

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Henrique Barbosa Soares

Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de  
colapso estrutural pelo Método dos Elementos Finitos Posicional

São Carlos

2021





Henrique Barbosa Soares

Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de colapso estrutural pelo Método dos Elementos Finitos Posicional

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Doutor em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola

São Carlos

2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S676d Soares, Henrique Barbosa  
Desenvolvimento de ferramenta computacional para  
análise de colapso estrutural pelo Método dos Elementos  
Finitos Posicional / Henrique Barbosa Soares;  
orientador Rodrigo Ribeiro Paccola. São Carlos, 2021.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de  
Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de  
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2021.

1. modelagem numérica. 2. método dos elementos  
finitos posicional. 3. instabilidade de estruturas. 4.  
impacto entre pavimentos. 5. elemento de ligação entre  
barras. 6. análise não-linear física e geométrica. I.  
Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **HENRIQUE BARBOSA SOARES**.

Título da tese: "Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de colapso estrutural pelo método dos elementos finitos posicional".

Data da defesa: 30/11/2021.

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Associado **Rodrigo Ribeiro Paccola**  
**(Orientador)**

**APROVADO**

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Titular **Maximiliano Malite**

**APROVADO**

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Alex Sander Clemente de Souza**

**APROVADO**

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Prof. Dr. **Cilmar Donizeti Baságia**

**APROVADO**

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Daniel Nelson Maciel**

**APROVADO**

(Universidade Federal do Rio Grande do Norte/UFRN)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**



## AGRADECIMENTOS

À minha família pelo apoio durante toda a minha jornada estudantil e acadêmica.

Ao meu orientador Rodrigo Ribeiro Paccola pela paciência, compreensão e orientação prestada.

Ao professor Humberto Breves Coda que teve grande participação e contribuição no desenvolvimento deste trabalho, em especial no desenvolvimento dos artigos científicos.

Aos professores Alex Sander e Maximiliano Malite, membros da banca de qualificação e de defesa desta tese, e aos professores Cilmar Baságua e Daniel Maciel, membros da banca de defesa, pela participação na avaliação do trabalho e pelas contribuições ao aprimoramento do texto.

Aos meus amigos de doutorado, em especial a Antonio Rodrigues Neto, Matheus Rocha e Péricles Carvalho, pelas conversas sobre os tópicos aqui desenvolvidos e pelos momentos de descontração.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) e seus funcionários pela infraestrutura fornecida e pelo suporte para a realização do trabalho.

A presente pesquisa foi realizada com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2018/19288-8.



## RESUMO

SOARES, H. B. **Desenvolvimento de ferramenta computacional para análise de colapso estrutural pelo Método dos Elementos Finitos Posicional**. 2021. 161p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

No presente trabalho são desenvolvidas formulações numéricas que resultam numa ferramenta computacional para análise de colapso estrutural de edificações compostas por perfis de parede fina. No presente contexto, entende-se por perfis de parede fina aqueles que podem ser modelados com elementos de casca. Para tal finalidade, emprega-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) em sua versão posicional e descrição Lagrangeana Total do equilíbrio. Adicionalmente, diversos desenvolvimentos são incorporados à ferramenta computacional com o objetivo de melhor simular uma situação de colapso. Para a resolução do sistema resultante da formulação não-linear do MEF para problemas estáticos, emprega-se a estratégia do comprimento de arco (Newton-Raphson + equação de restrição de arco). Desenvolve-se também uma estratégia de inserção de força de perturbação durante a análise para contornar um ponto de bifurcação e escolher qual trajetória de equilíbrio seguir a partir deste ponto. O critério para definir a força de perturbação e quando aplicá-la é baseado na análise de estabilidade, que é realizada por meio da resolução de um problema generalizado de autovalor. No caso do problema dinâmico, o método de Newton-Raphson é empregado para a solução do sistema não-linear. A integração temporal é realizada por meio do método  $\alpha$ -generalizado, que permite um controle preciso da dissipação numérica de altas frequências e, conseqüentemente, um controle melhor da estabilidade do método. No aspecto de modelagem de edificações, foi proposta originalmente uma estratégia de conexão entre elementos estruturais viga-pilar ou viga-laje cujas discretizações sejam não-conformes. A estratégia proposta é baseada no embutimento dos nós de extremidade de cada elemento estrutural em um elemento finito de sólido auxiliar que preenche o espaço de conexão. Quanto à modelagem do material, emprega-se a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff e considera-se plasticidade baseada no critério de von Mises com encruamento linear. Para a análise de colapso, é de interesse também a modelagem de contato/impacto entre pavimentos. Nesse sentido, é implementada e validada a estratégia de contato nó-a-superfície. Por fim, são desenvolvidos alguns exemplos de estruturas com o intuito de mostrar a aplicabilidade das formulações desenvolvidas em conjunto com análises elasto-plástica, dinâmica e de contato.

**Palavras-chave:** modelagem numérica; método dos elementos finitos posicional; instabilidade de estruturas; impacto entre pavimentos; elemento de ligação entre barras; análise não-linear física e geométrica.





## ABSTRACT

SOARES, H. B. **Development of a computational tool for structural collapse analysis by the Positional Finite Element Method.** 2021. 161p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

The present research deals with the development of numerical formulations that result in a computational tool for structural collapse analysis of buildings composed of thin-walled profiles. In this context, thin-walled profiles are considered as those that can be modelled by shell elements. Thereby, these numerical analyses utilize the positional version of the Finite Element Method (FEM) and the Total Lagrangian equilibrium description. Additionally, this research's computational tool incorporates several developments in order to better simulate the collapse. Besides, the arc-length strategy (Newton-Raphson + arc constraint equation) solves the resulting algebraic system from the non-linear FEM formulation in static applications. Also, there is the development of a perturbation force insertion strategy, in which the formulation becomes capable of bypassing the bifurcation point and choosing an equilibrium trajectory after this point. The criterion that defines the perturbation force's magnitude and in which load step it is applied is based on a stability analysis, which is a result from a generalized eigenvalue problem. In the case of the dynamic problem, the Newton-Raphson method solves the nonlinear system. In addition, the generalized- $\alpha$  method performs the temporal integration, in which it is possible to obtain a precise control of the numerical dissipation of high frequencies, and, consequently, a better control of the stability of the method. Moreover, in the building modelling context, the present research proposes an original strategy to connections between beam-column or beam-slab structural elements whose discretizations are non-conforming. To perform such task, there is the embedding of the endpoints of each structural element in an auxiliary solid finite element that fills the connection space. As for the material modeling, the present research applies the Saint-Venant-Kirchhoff constitutive law and the von Mises criterion with linear hardening for the plasticity. For the collapse analysis, the contact/impact modelling between floors is also an important topic covered by this research. In this scenario, the node-to-surface contact strategy is implemented and validated. Finally, the development of some structural applications presents the applicability of the developed formulations considering elasto-plasticity, dynamic and contact analyses.

**Keywords:** numerical modeling; positional finite element method; structural instability; impact between floors; connecting element between bars; physical and geometric nonlinear analysis.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Edifício Ronan Point após o colapso. . . . .	26
Figura 2 – Mudança de configuração de um sólido . . . . .	32
Figura 3 – Mudança de configuração do elemento finito de treliça . . . . .	48
Figura 4 – Mudança de configuração do elemento finito de sólido tridimensional . . . . .	50
Figura 5 – Mudança de configuração do elemento finito de casca . . . . .	51
Figura 6 – Equivalência entre as energias de deformação de: (a) sólido que preenche o espaço de ligação e (b) elemento de barra simples (conectando os vetores generalizados) . . . . .	53
Figura 7 – Pressão seguidora atuando sobre um elemento finito de superfície . . . . .	54
Figura 8 – Pêndulo elástico: condições iniciais e de contorno e propriedades . . . . .	56
Figura 9 – Variação de comprimento $\Delta L$ (mm) em função do tempo (s) para diferentes raios espectrais $\rho_\infty$ : (a) solução de referência obtida por Kuhl e Crisfield (1999) e (b) solução obtida no presente trabalho. . . . .	57
Figura 10 – Energia total ( $J$ ) em função do tempo (s) para diferentes raios espectrais $\rho_\infty$ : (a) solução de referência obtida por Kuhl e Crisfield (1999) e (b) solução obtida no presente trabalho. . . . .	58
Figura 11 – Geometria, carregamento e discretização da régua flexível. . . . .	59
Figura 12 – Energia ( $J$ ) em função do tempo (ms) para diferentes raios espectrais $\rho_\infty$ : (a) solução de referência obtida por Kuhl e Ramm (1999) e (b) solução obtida no presente trabalho. . . . .	60
Figura 13 – Movimentação da régua flexível para $\rho_\infty = 0,85$ plotadas a cada 4 ms. . . . .	61
Figura 14 – Discretização da régua flexível em elementos finitos de sólido hexaédrico com aproximação quadrática . . . . .	61
Figura 15 – Energia ( $J$ ) em função do tempo (ms) para diferentes raios espectrais $\rho_\infty$ utilizando elemento finito de sólido tridimensional . . . . .	62
Figura 16 – Procedimento iterativo da estratégia do comprimento de arco . . . . .	64
Figura 17 – Esquema estático e detalhe da seção transversal . . . . .	70
Figura 18 – Discretização utilizada e forças de imperfeição impostas . . . . .	70
Figura 19 – Gráficos para imperfeição de flexão . . . . .	72
Figura 20 – Gráficos para imperfeição local . . . . .	73
Figura 21 – Gráficos para imperfeição de torção . . . . .	74
Figura 22 – Configurações pós-críticas para as seguintes situações: (a) imperfeição de flexão, (b) imperfeição local e (c) imperfeição de torção . . . . .	75
Figura 23 – Discretização do tubo para determinação da trajetória de equilíbrio . . . . .	77
Figura 24 – Trajetórias de equilíbrio para tubo sob pressão lateral externa . . . . .	78

Figura 25 – Esquema estático e discretização do toroide submetido a uma força transversal . . . . .	78
Figura 26 – Modos de instabilidade para toroide sob flexão e torção . . . . .	79
Figura 27 – Trajetória de equilíbrio para deslocamento na direção $z$ na extremidade de aplicação da força . . . . .	80
Figura 28 – Configuração deformada para o último passo da análise ( $\lambda = 31,48$ ) . . . . .	80
Figura 29 – Intuição do acoplamento casca-sólido . . . . .	81
Figura 30 – Esquemas de treliça para simulação da conexão entre elementos estruturais . . . . .	89
Figura 31 – Esquemas de treliça para determinação de rigidez equivalente . . . . .	89
Figura 32 – Geometria, carregamento e condições de apoio para pórtico plano em “L” com seção transversal em U . . . . .	91
Figura 33 – Modelos adotados para a ligação: (a) Caso I, (b) Caso II e (c) Caso III . . . . .	91
Figura 34 – Análise de convergência em carga crítica para os casos I e III relativa ao ANSYS . . . . .	92
Figura 35 – Primeiro modo de instabilidade para pórtico plano em “L”: (a) ANSYS, (b) Caso I . . . . .	93
Figura 36 – Trajetória de equilíbrio do ponto $C$ na direção $x$ . . . . .	93
Figura 37 – Geometria, carregamento e condições de apoio para pórtico plano em “L” com seção transversal em I . . . . .	94
Figura 38 – Geometria e modelagem da ligação . . . . .	95
Figura 39 – Trajetórias de equilíbrio para o modelo com ligação I . . . . .	96
Figura 40 – Trajetórias de equilíbrio para o modelo com ligação II . . . . .	96
Figura 41 – Trajetórias de equilíbrio para o modelo com ligação III . . . . .	96
Figura 42 – Portico com torção dominante: (a) esquema estático e (b) conexões . . . . .	97
Figura 43 – Primeiros três modos de instabilidade para o problema de torção dominante . . . . .	98
Figura 44 – Trajetórias de equilíbrio para os pontos A e B (vide Figura 42(a)) . . . . .	99
Figura 45 – Configuração final do pórtico para fator de carga $\lambda = 171,07$ . . . . .	99
Figura 46 – Edificação de três pavimentos com planta hexagonal . . . . .	100
Figura 47 – Informações referentes à (a) orientação dos pilares e à (b) seção transversal dos pilares e das vigas . . . . .	100
Figura 48 – Dispositivos de conexão: (a) elemento hexaédrico com aproximação linear para conexão viga-pilar, (b) sólido para conexão viga-laje (tracejado) . . . . .	101
Figura 49 – Discretizações para as três situações analisadas: (a) sem contraventamento, (b) contraventamento total e (c) contraventamento seletivo . . . . .	102
Figura 50 – Primeiro modo de instabilidade para cada caso analisado . . . . .	102
Figura 51 – Trajetórias de equilíbrio do ponto de aplicação da força concentrada $F$ . . . . .	103
Figura 52 – Configuração deformada da estrutura ao fim da análise . . . . .	104
Figura 53 – Geometria, condições de contorno e conexão viga-viga para o pórtico tridimensional . . . . .	104

Figura 54 – Pórtico modificado proposto para analisar o comportamento no regime de grandes deslocamentos . . . . .	105
Figura 55 – Trajetórias de equilíbrio para o ponto A – sentido negativo do eixo $z$ .	106
Figura 56 – Resultados para conexão I: (a) primeiro modo de instabilidade e (b) configuração deformada ( $u_{zA} = -28,96\text{ cm}$ , $P = 102,85\text{ kN}$ ) . . . . .	107
Figura 57 – Diagrama tensão-deformação para lei constitutiva elasto-plástica . . . . .	112
Figura 58 – Vistas frontal e superior do domo treliçado . . . . .	121
Figura 59 – Deslocamento vertical do ponto de aplicação da força . . . . .	122
Figura 60 – Geometria e discretização do tubo cilíndrico . . . . .	123
Figura 61 – Deslocamento vertical para baixo do ponto A . . . . .	123
Figura 62 – Superfícies candidatas ao contato, sendo $\mathbf{g}$ o vetor <i>gap</i> e $\mathbf{n}$ a normal exterior à $\Gamma_c^{(1)}$ . . . . .	126
Figura 63 – Dois blocos em situação de contato. . . . .	137
Figura 64 – Configuração final da estrutura: (a) Método da Penalização e (b) Método dos Multiplicadores de Lagrange. . . . .	138
Figura 65 – Esquema estático e dimensões de interesse do pórtico tridimensional. .	142
Figura 66 – Elemento de conexão viga-pilar. . . . .	142
Figura 67 – Pórtico tridimensional elastoplástico - configuração deformada. . . . .	143
Figura 68 – Trajetórias de equilíbrio do ponto A (ver Figura 65). . . . .	144
Figura 69 – Casos de carregamento para análise dinâmica do pórtico tridimensional.	144
Figura 70 – Deslocamentos obtidos na análise dinâmica do pórtico tridimensional. .	145
Figura 71 – Esquema estático e dimensões de interesse do edifício de dois pavimentos.	146
Figura 72 – Elemento de conexão viga-laje (tracejado). . . . .	146
Figura 73 – Deslocamento vertical do ponto central da laje do pavimento superior do edifício. . . . .	147
Figura 74 – Deslocamento vertical do ponto central da laje do pavimento inferior do edifício. . . . .	147
Figura 75 – Configurações do edifício de dois pavimentos em seis instantes selecionados.	148



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Autovalores para modo de imperfeição de flexão . . . . .	71
Tabela 2 – Autovalores para modo de imperfeição local . . . . .	71
Tabela 3 – Autovalores para modo de imperfeição de torção . . . . .	71
Tabela 4 – Cargas críticas obtidas via análise por meio da trajetória de equilíbrio .	75
Tabela 5 – Cargas críticas (em $MPa$ ) para tubo sob pressão lateral externa . . . . .	76
Tabela 6 – Cargas críticas (em $MPa$ ) para toroide sob flexão e torção . . . . .	79
Tabela 7 – Carga crítica (em $kN$ ) para o pórtico em “L” com seção U . . . . .	93
Tabela 8 – Carga crítica (em $kN$ ) para o pórtico em “L” com seção I . . . . .	95
Tabela 9 – Cinco primeiras cargas críticas ( $\lambda$ ) para o pórtico em “L” com torção dominante . . . . .	98
Tabela 10 – Fatores de carga crítica ( $\lambda$ ) para os casos de contraventamento analisados	103
Tabela 11 – Carga crítica (em $kN$ ) para o pórtico tridimensional . . . . .	105
Tabela 12 – Cargas críticas ( $kN$ ) para o pórtico tridimensional modificado . . . . .	106
Tabela 13 – Fatores de carga crítica ( $\lambda_{cr}$ ) para o pórtico tridimensional. . . . .	142





## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>1.3</b>	<b>Metodologia</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>1.4</b>	<b>Colapso estrutural</b> . . . . .	<b>26</b>
<b>2</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE ELÁSTICA NÃO-LINEAR</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>2.1</b>	<b>Mudança de configuração</b> . . . . .	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Equilíbrio Lagrangiano</b> . . . . .	<b>32</b>
<b>2.3</b>	<b>Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>2.4</b>	<b>Equações de equilíbrio</b> . . . . .	<b>34</b>
<b>2.5</b>	<b>Integração temporal - Método <math>\alpha</math>-generalizado</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>2.6</b>	<b>Solução do sistema de equações não-lineares</b> . . . . .	<b>38</b>
<b>2.7</b>	<b>Estabilidade do equilíbrio estático</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>3</b>	<b>CINEMÁTICA DOS ELEMENTOS FINITOS</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>3.1</b>	<b>Elemento finito de barra simples</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>3.2</b>	<b>Elemento finito de sólido tridimensional</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>3.3</b>	<b>Elemento finito de casca</b> . . . . .	<b>51</b>
3.3.1	Acoplamento entre vetores generalizados não-coincidentes . . . . .	52
3.3.2	Força não-conservativa - pressão seguidora . . . . .	54
<b>3.4</b>	<b>Exemplos numéricos</b> . . . . .	<b>56</b>
3.4.1	Pêndulo elástico . . . . .	56
3.4.2	Régua flexível . . . . .	59
<b>4</b>	<b>SOLUÇÃO VIA ESTRATÉGIA DO COMPRIMENTO DE ARCO</b> . . . . .	<b>63</b>
<b>4.1</b>	<b>Estágio de previsão</b> . . . . .	<b>64</b>
<b>4.2</b>	<b>Estágio de correção</b> . . . . .	<b>66</b>
<b>4.3</b>	<b>Determinação de trajetórias de equilíbrio bifurcadas</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>4.4</b>	<b>Exemplos numéricos</b> . . . . .	<b>69</b>
4.4.1	Perfil U . . . . .	69
4.4.2	Tubo sob pressão lateral externa . . . . .	75
4.4.3	Toroide submetido a flexão e torção . . . . .	78

<b>5</b>	<b>ACOPLAMENTO CINEMÁTICO ENTRE ELEMENTOS FINITOS</b> . . . . .	<b>81</b>
5.1	Forma fraca e sua linearização . . . . .	82
5.2	Acoplamento de posições nodais . . . . .	84
5.3	Acoplamento de vetores generalizados . . . . .	84
5.4	Generalização e aspectos sobre implementação computacional .	86
5.5	Determinação das coordenadas paramétricas . . . . .	87
5.6	Conexão entre elementos estruturais . . . . .	88
5.7	Exemplos numéricos . . . . .	90
5.7.1	Pórtico plano em “L” - seção U . . . . .	90
5.7.2	Pórtico plano em “L” - seção I . . . . .	94
5.7.3	Pórtico em “L” com torção dominante . . . . .	97
5.7.4	Edifício de três pavimentos . . . . .	99
5.7.5	Pórtico tridimensional . . . . .	103
<b>6</b>	<b>PLASTICIDADE EM PEQUENAS DEFORMAÇÕES</b> . . . . .	<b>109</b>
6.1	Modelo elasto-plástico unidimensional . . . . .	110
6.1.1	Algoritmo em passo finito . . . . .	112
6.1.2	Estágio de previsão . . . . .	113
6.1.3	Estágio de correção . . . . .	113
6.2	Modelo elasto-plástico tridimensional . . . . .	114
6.2.1	Algoritmo em passo finito . . . . .	118
6.2.2	Estágio de previsão . . . . .	118
6.2.3	Estágio de correção . . . . .	119
6.2.4	Tensor constitutivo elasto-plástico algorítmico . . . . .	119
6.3	Exemplos numéricos . . . . .	121
6.3.1	Domo treliçado . . . . .	121
6.3.2	Tubo cilíndrico . . . . .	122
<b>7</b>	<b>CONTATO ENTRE SUPERFÍCIES</b> . . . . .	<b>125</b>
7.1	Contato nó-a-superfície . . . . .	127
7.1.1	Busca global pelo ponto de contato . . . . .	128
7.1.2	Busca local pelo ponto de contato . . . . .	129
7.1.3	Obtenção da forma fraca - Método da Penalização . . . . .	130
7.1.4	Linearização da forma fraca - Método da Penalização . . . . .	131
7.1.5	Obtenção da forma fraca - Método dos Multiplicadores de Lagrange . .	134
7.1.6	Linearização da forma fraca - Método dos Multiplicadores de Lagrange .	135
7.2	Algoritmo de solução . . . . .	135
7.3	Exemplo numérico de validação . . . . .	137
7.3.1	Contato entre dois blocos . . . . .	137

<b>8</b>	<b>EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</b>	<b>141</b>
<b>8.1</b>	<b>Pórtico tridimensional elastoplástico</b>	<b>141</b>
8.1.1	Análise estática	143
8.1.2	Análise dinâmica	144
<b>8.2</b>	<b>Edifício de dois pavimentos</b>	<b>145</b>
<b>9</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>151</b>
<b>9.1</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros</b>	<b>153</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>155</b>



# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

A capacidade de dimensionar e executar estruturas civis é fundamental para a sociedade tecnológica atual. Como exemplos, destacam-se a transposição de obstáculos por meio de pontes e a otimização do uso do espaço físico em edifícios residenciais e industriais cada vez mais altos. Nesse contexto, a garantia da não ocorrência de ruína é fundamental para a segurança dessas estruturas. Além disso, o dimensionamento dessas estruturas deve levar em consideração o adequado cumprimento de sua finalidade. Por outro lado, a otimização do uso dos materiais envolvidos objetiva a economia dos recursos empregados em tais construções. Nesse cenário, a busca pelo menor custo de produção, aliada à segurança dos elementos estruturais, requer uma análise que englobe diversos fenômenos que são usualmente desconsiderados ou são tratados de forma simplificada no projeto de estruturas civis usuais. Entre esses fenômenos, podem ser citados os seguintes: análise dinâmica, análise não-linear geométrica, consideração de imperfeições etc.

Dentre os materiais empregados na engenharia de estruturas, destaca-se o aço, liga metálica constituída essencialmente de ferro e baixo teor de carbono. Por se tratar de um material dúctil, as falhas estruturais decorrentes de tensões excessivas não ocorrem de maneira abrupta, o que permite a identificação e prevenção de eventuais colapsos. Além disso, devido à elevada resistência estrutural do aço e à sua flexibilidade no processo de fabricação, seu emprego é realizado basicamente na forma de perfis, sejam estes laminados, soldados ou formados a frio. Contudo, esse tipo de estrutura possui elevada esbeltez, de modo que os fenômenos de perda de estabilidade se tornam relevantes na análise do seu comportamento mecânico.

A perda de estabilidade de uma estrutura pode ocorrer de duas formas. A primeira diz respeito à instabilidade por bifurcação do equilíbrio, que em pequenos deslocamentos é mais conhecida como flambagem. Esse tipo de instabilidade consiste da existência de mais de uma trajetória de equilíbrio partindo de um mesmo ponto, denominado ponto de bifurcação. Nessa situação, a estrutura perde rigidez por conta de efeitos geométricos, podendo sofrer grandes deslocamentos de forma abrupta na busca por uma trajetória

pós-crítica estável. A segunda forma é denominada instabilidade por ponto limite, presente nas trajetórias de equilíbrio que possuem trechos estáveis e instáveis, sem presença de bifurcação. Essa perda de estabilidade é caracterizada pela ocorrência de ‘salto’ (ou *snap*) após se ultrapassar o ponto limite quando da realização de um processo incremental de força ou deslocamento.

Nesse contexto, a correta previsão e identificação dos pontos críticos de instabilidade é efetuada apenas por meio de análise não-linear geométrica acoplada à análise de estabilidade. Na análise não-linear geométrica, as equações de compatibilidade são escritas em função das configurações atual e de referência da estrutura. Caso a configuração de referência seja fixa e correspondente à configuração inicial, a descrição é dita Lagrangiana Total. Caso a referência seja constantemente atualizada para uma determinada configuração conhecida, a descrição é dita Lagrangiana Atualizada. De todo modo, a análise que envolve uma descrição não-linear geometricamente precisa admite naturalmente a ocorrência dos tipos de instabilidade outrora mencionados.

Outro fator relevante na análise mecânica das estruturas diz respeito à degradação do material. Especificamente com relação ao aço, por ser um material dúctil, é interessante que seja considerada a influência do regime plástico em seu comportamento estrutural. O fenômeno da plasticidade é originado a partir do rearranjo cristalino da microestrutura do material quando o mesmo está submetido a tensões acima do limite de escoamento. Os efeitos na macroescala correspondem à presença de deformações residuais e alteração do limite de escoamento quando da ocorrência de encruamento. O encruamento, por sua vez, é relacionado à rigidez presente durante o trecho de escoamento, permitindo acréscimos de deformação elástica no regime plástico.

Quando se inicia o processo de colapso de uma estrutura, após o esgotamento da capacidade resistente de um ou mais elementos estruturais, a descrição estática de seu comportamento deixa de ser representativa. Nessa situação, o modelamento se torna mais fidedigno com o emprego da dinâmica das estruturas. Assim, os efeitos inerciais decorrentes da movimentação da estrutura são devidamente considerados, permitindo uma análise mais coerente com o fenômeno real.

Um fenômeno também inerente ao processo de colapso diz respeito ao impacto entre os elementos estruturais. A situação mais notável remete ao impacto entre os panos de laje que definem os pavimentos da edificação, sendo este um exemplo de colapso progressivo. Portanto, a consideração do contato/impacto é imprescindível numa análise de colapso, especialmente colapso progressivo, tendo em vista a relevância deste fenômeno nesse contexto.

Em suma, o tratamento ideal para a análise de colapso de estruturas envolve a inclusão dos diversos fenômenos supracitados, que podem ser fortemente não-lineares, inviabilizando a abordagem analítica. Dessa forma, lança-se mão de métodos numéricos

para a resolução desses problemas. Entre os métodos numéricos existentes, destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), que se baseia no relaxamento sobre as condições exigidas para a solução, possibilitando a determinação de uma sistemática geral para a obtenção de soluções aproximadas.

Nesta pesquisa é empregada a formulação posicional do MEF, que admite como graus de liberdade básicos as posições e os vetores generalizados nodais ao invés de deslocamentos e giros, como no MEF tradicional. A abordagem não-linear geométrica é introduzida por meio da descrição Lagrangiana Total do equilíbrio. Para a discretização dos elementos estruturais de parede fina, é utilizado elemento finito de casca. Eventuais mecanismos de contraentamento são introduzidos por meio de elemento finito de barra simples.

A conexão entre os elementos estruturais viga-pilar ou viga-laje, considerando que esses componentes estão discretizados em elemento de casca, é um desafio abordado na presente pesquisa. A abordagem tradicional seria a discretização dos elementos reais de ligação, exigindo uma malha de elementos finitos altamente refinada nessa região, o que geraria um alto custo computacional. Na presente pesquisa, essa conexão entre elementos estruturais é realizada por meio de um elemento finito de sólido tridimensional, de forma que não se necessite compatibilizar as discretizações na região de ligação. Essa metodologia é uma idealização do mecanismo de transmissão de esforços da conexão, sendo útil para a determinação do comportamento global da estrutura, e com um menor custo computacional quando comparado com a abordagem tradicional. Para estudos em que o objetivo principal seja analisar o comportamento da conexão, sua discretização deve ser realizada de forma a se capturar os fenômenos de interesse ao referido tipo de análise.

Diante das questões apresentadas, fundamentais para uma análise mecânica completa dos sistemas estruturais que esta pesquisa abrange, os objetivos deste trabalho são apresentados na próxima seção.

## 1.1 **Objetivos**

O objetivo principal desta tese é o desenvolvimento de formulação numérica para a análise avançada de colapso de estruturas com base no Método dos Elementos Finitos Posicional. Para cumprir o objetivo principal, elencam-se os seguintes objetivos específicos:

- Implementar formulação de plasticidade tridimensional em código computacional baseado em formulação não-linear geométrica e elemento finito de casca.
- Aprimorar a rotina de solução não-linear estática incorporando a estratégia de comprimento de arco na solução e busca pelas trajetórias de equilíbrio em bifurcações através de algoritmo de autovalor/autovetor.

- Implementar algoritmo de integração temporal para análises dinâmicas.
- Desenvolver estratégia original de conexão sólido-casca para realizar a junção de elementos estruturais geometricamente não conformes.
- Implementar estratégia de contato entre pavimentos para a simulação adequada do colapso progressivo de estruturas.
- Realizar validações com resultados da literatura e estudos de caso para exploração do ferramental desenvolvido.

## 1.2 Justificativa

A partir das questões apresentadas até aqui, ressalta-se a importância de se ter uma ferramenta computacional robusta para análise de colapso estrutural. Aliado a isso, a possibilidade de interação com a comunidade, por meio da disponibilização do *software* desenvolvido, e a estruturação do código base para que futuras pesquisas deem prosseguimento, constituem justificativas plausíveis para a execução dessa pesquisa.

Quanto ao aspecto de originalidade, destaca-se a proposta inovadora de modelagem da conexão entre elementos estruturais. A dificuldade de se modelar essas conexões com a utilização de elementos finitos de casca é um grande desafio, principalmente para problemas que desenvolvem grandes deslocamentos (KWASNIEWSKI, 2010). Essa dificuldade se dá devido à incompatibilidade geométrica e/ou de discretização dos perfis que chegam na conexão. Assim, a presente proposta visa resolver este problema com o desenvolvimento de uma estratégia que permite redução do custo computacional, sendo estruturalmente coerente e de fácil utilização.

Por fim, pode-se mencionar a inclusão de diversos temas relevantes na análise do comportamento mecânico de uma estrutura. A análise precisa, envolvendo os mais diversos fenômenos físicos que podem estar presentes numa situação de colapso, permite a obtenção de conclusões mais gerais sobre o comportamento mecânico das estruturas.

## 1.3 Metodologia

O sequenciamento das atividades realizadas segue a presente metodologia. Inicialmente, a linguagem computacional C++ é escolhida para as implementações, sendo os códigos já existentes escritos em FORTRAN, desenvolvidos em Soares (2019), traduzidos para a nova linguagem. Dessa forma, obtém-se um código base inicial, orientado a objetos, que permite a realização de análises de estabilidade em estruturas discretizadas em elementos finitos de casca.



A formulação base do elemento finito de casca utilizado é encontrada em Coda e Paccola (2008), e possui como parâmetros nodais posições, vetores generalizados<sup>1</sup> e taxa de deformação linear na espessura. Os elementos finitos de barra simples e de sólido tridimensional empregados admitem como parâmetros nodais as posições e a descrição completa de suas formulações pode ser encontrada em Coda (2018).

As implementações referentes à elasto-plasticidade são baseadas em formulações já consolidadas da literatura, como as apresentadas em Simo e Hughes (1998) e Souza Neto, Perić e Owen (2008). Essas implementações são utilizadas em conjunto com a formulação não-linear geométrica dos elementos finitos, permitindo aproveitar-se do procedimento iterativo de busca de solução já existente.

Quanto ao procedimento iterativo, é empregada a estratégia do comprimento de arco, que consiste no método de Newton-Raphson acrescido de uma equação adicional de restrição (arco), para a resolução de problemas estáticos. Essa estratégia é utilizada tendo em vista sua eficiência para tratar de problemas que apresentam trajetórias de equilíbrio com trechos instáveis (WEMPNER, 1971; RIKS, 1972; CRISFIELD, 1981).

Quanto ao problema dinâmico, é empregado o método  $\alpha$ -generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993), no qual a escolha de parâmetros adequada o torna mais estável que o integrador de Newmark. Além disso, este método possui a vantagem de permitir dissipação numérica controlada. Com uma escolha específica de parâmetros, o método  $\alpha$ -generalizado é capaz de reproduzir o método de Newmark, caso seja de interesse seu uso.

No aspecto da modelagem estrutural, desenvolve-se uma estratégia original de acoplamento casca-sólido. A estratégia é inspirada nos trabalhos anteriores do presente grupo de pesquisa referentes à imersão de fibras em meios sólidos. Um dos primeiros trabalhos do grupo a tratar deste tema é o de Vanalli, Paccola e Coda (2008).

Tendo em vista a complexidade das análises realizadas e o custo computacional demandado, o código computacional foi paralelizado por meio de diretivas OpenMP (DAGUM; MENON, 1998). Assim, consegue-se usufruir dos processadores de forma mais eficiente, tendo em vista a característica *multithread*<sup>2</sup> dos mesmos.

Por fim, são realizados exemplos numéricos para validação das implementações, cujas soluções são comparadas com resultados da literatura e/ou *softwares* comerciais. Exemplos de aplicação também são realizados, nos quais são exploradas as potencialidades da formulação desenvolvida.

---

<sup>1</sup> Vetores generalizados nesse contexto são vetores unitários e ortogonais à superfície média da casca na configuração inicial, não se mantendo necessariamente unitários e ortogonais à superfície média na configuração atual. Mais detalhes são encontrados em Coda e Paccola (2008).

<sup>2</sup> Característica *multithread* indica, grosso modo, capacidade de executar diversos processos (tarefas) ao mesmo tempo, em paralelo.

## 1.4 Colapso estrutural

Diversos trabalhos na literatura estão preocupados com a análise do colapso estrutural, em especial o colapso progressivo. Conforme [Ellingwood \(2006\)](#), o colapso progressivo de uma estrutura inicia-se com um evento adverso causador de uma falha local tal que o sistema estrutural é incapaz de absorver. Como consequência, ocorre a propagação dos danos a toda a estrutura de modo que há um estado de danificação desproporcional ao agente causador. Nesse contexto, [Ellingwood \(2006\)](#) propõe estratégias para dimensionamento estrutural focado na mitigação da ocorrência do colapso progressivo.

A busca pelo dimensionamento de estruturas menos propensas a falhas catastróficas por colapso progressivo se tornou mais aprofundada após o colapso parcial em 1968 do edifício Ronan Point, em Londres. De acordo com [Pearson e Delatte \(2005\)](#), uma pequena explosão na cozinha do 18º andar do edifício em concreto armado de 22 pavimentos promoveu a queda de uma laje sobre todas as lajes abaixo dela, conforme [Figura 1](#). Após este evento, diversas normativas passaram a incluir etapas de cálculo visando a mitigação de fenômenos similares.

Figura 1 – Edifício Ronan Point após o colapso.



Fonte: [Pearson e Delatte \(2005\)](#)

Além desse incidente, é relevante destacar o ataque terrorista ao World Trade Center, em 2001. [Bažant e Verdure \(2007\)](#) apontam que nunca antes havia ocorrido o

colapso de um arranha-céu devido a situação de incêndio. Os autores ainda pontuam que apesar do grave dano causado pelo impacto da aeronave, ele foi localizado. Destaca-se ainda que mesmo o incêndio subsequente provavelmente não levaria a estrutura ao colapso total. No entanto, a combinação de uma sucessão de diversos efeitos culminaram na perda de estabilidade dos pilares nos andares atingidos, levando a uma queda da parte superior da torre em uma altura de pelo menos um pavimento. Essa queda desencadeou o colapso progressivo da estrutura, dado que a energia cinética associada a esta queda era 10 vezes maior que a energia que poderia ser absorvida pela plastificação dos elementos inferiores (BAŽANT; ZHOU, 2002b; BAŽANT; ZHOU, 2002a).

Dentre os eventos que podem desencadear um colapso progressivo há o incêndio. Nesse contexto, diversos trabalhos estudaram o comportamento estrutural diante desse fenômeno (QUIEL; MARJANISHVILI, 2012; SUN; HUANG; BURGESS, 2012; AGARWAL; VARMA, 2014), os quais discutiram estratégias a se adotar para prevenir o colapso progressivo nessas condições. Além disso, ações excepcionais como explosões também pode desencadear colapsos desproporcionais, o que foi estudado por Elsanadedy et al. (2014). Assim, a partir do estudo do comportamento estrutural de um edifício em estrutura metálica, foi concluído que uma carga explosiva de 500 kg, que pode ser carregada por um veículo pequeno, seria suficiente para causar a ruína do edifício em estudo. A partir dessa conclusão, ações mitigantes foram sugeridas pelos autores. Ainda no contexto de colapsos desproporcionais por carregamentos externos, Alemdar e Alemdar (2021) apresentam o estudo de caso de um colapso estrutural de uma estrutura metálica após a solicitação por carga de neve comum à região da estrutura. Dessa forma, os autores detectaram que erros no dimensionamento da estrutura, assim como erros de execução e capacidade resistente inadequada dos elementos estruturais foram os motivos para os quais houve o colapso estrutural, e não a neve em si.

Adicionalmente, Khandelwal et al. (2008) desenvolveu macromodelos para investigar o colapso progressivo de edificações em aço projetadas para resistir a elevados abalos sísmicos, chegando à conclusão de que estruturas assim projetadas são mais resistentes ao colapso progressivo que sistemas projetados para risco sísmico moderado. Kwasniewski (2010) apresentou um estudo de caso, no qual foi simulada, via análise dinâmica não-linear em elementos finitos, uma edificação em aço de 8 pavimentos. Nesse estudo, uma das situações avaliadas como cruciais pelos autores se refere ao modelamento das conexões viga-pilar, os quais identificaram a necessidade de elevada discretização nessa região e correta definição dos critérios de falha para os elementos de conexão.

Gerasimidis e Sideri (2016) apontaram a importância do desenvolvimento de técnicas mais completas para a análise de colapso progressivo, uma vez que as técnicas normativas baseadas na retirada seletiva de pilares de sustentação não foram tão eficientes quando comparadas com análises mais completas. Nesse sentido, Diab et al. (2021) apresentam uma

proposta de análise do colapso progressivo considerando o acoplamento entre análises não-lineares geométricas com a teoria da análise plástica. Com relação à abordagem energética, [Szyniszewski e Krauthammer \(2012\)](#) conduziram uma análise de colapso progressivo, na qual verificaram a conversão da energia cinética em energia de deformação de membros da estrutura, observando pontos limites onde o colapso poderia avançar ou parar. Já no contexto da análise não linear geométrica, [Li e El-Tawil \(2014\)](#) chegaram a conclusões diferentes das prescrições normativas, quando realizaram análises não-linear geométricas tridimensionais de estruturas submetidas a abalos sísmicos. Diversos outros trabalhos preocupados com a prevenção e com o comportamento de estruturas em situação de colapso podem ser citados ([BASAGLIA; CAMOTIM; SILVESTRE, 2013](#); [CAMOTIM; BASAGLIA, 2014](#); [LI et al., 2017](#); [LI et al., 2018](#); [FRATAMICO et al., 2018](#); [PANTIDIS; GERASIMIDIS, 2018](#)).

Vários dos trabalhos já citados se preocupam com situações de colapso proveniente de abalos sísmicos, avaliando principalmente o comportamento da estrutura a partir da retirada de pilares. Em contraponto, [Behnam, Shojaei e Ronagh \(2019\)](#) avaliaram a possibilidade de colapso quando da remoção de vigas. Segundo o estudo, o impacto dessas vigas no pavimento inferior promove grandes solicitações, chegando ao colapso em todos os cenários numericamente avaliados. É relevante mencionar também o estudo do colapso advindo da queda sucessiva entre lajes efetuado por [Vlassis et al. \(2009\)](#).

Quanto aos trabalhos mais recentes sobre colapso progressivo, pode-se citar ([LUO et al., 2019](#); [HESHMATI; AGHAKOUCHAK, 2020](#); [KONG et al., 2020](#); [MARAGHEH; JALALI; HEZAVEH, 2020](#); [SALMASI et al., 2020](#); [WANG; YANG; PAN, 2020](#)). Todos esses trabalhos recorrem a ensaios experimentais ou a métodos numéricos de análise estrutural, geralmente por meio de *softwares* comerciais. Portanto, a presente pesquisa visa gerar uma ferramenta computacional para análise de estruturas em situação de colapso, permitindo que análises mais detalhadas de casos relevantes sejam realizadas, sem as limitações impostas pelas metodologias contidas nos pacotes comerciais.

No contexto dos desenvolvimentos numéricos desta pesquisa, pode-se citar os trabalhos referentes ao desenvolvimento da formulação do MEF Posicional para análise de cascas e placas em regime não-linear geométrico ([CODA; PACCOLA, 2007](#); [CODA; PACCOLA; SAMPAIO, 2013](#); [NOGUEIRA; PACCOLA; CODA, 2018](#); [CODA; PACCOLA; CARRAZEDO, 2017](#); [PACCOLA; SAMPAIO; CODA, 2016](#)). Com relação à abordagens que incluem não-linearidade física, como a plasticidade de materiais ortotrópicos e laminados, existem diversos trabalhos já desenvolvidos pelo grupo de pesquisa ([CODA; PACCOLA, 2014](#); [CODA; SAMPAIO; PACCOLA, 2015](#); [PACCOLA; PIEDADE NETO; CODA, 2015](#); [PASCON; CODA, 2015](#)). Os problemas envolvendo análise dinâmica no contexto da não-linearidade geométrica também foram abordados em trabalhos anteriores do grupo ([CODA; PACCOLA, 2009, 2011, 2014](#); [SANCHES; CODA, 2017](#)).

A estratégia de conexão entre os elementos estruturais proposta nesta pesquisa tem como base os trabalhos referentes à imersão de fibras ou partículas em meios sólidos. Essa estratégia foi desenvolvida no grupo de pesquisa inicialmente por [Vanalli, Paccola e Coda \(2008\)](#) e aplicada posteriormente em diversos outros trabalhos do grupo ([SAMPAIO; PACCOLA; CODA, 2013, 2015](#); [PACCOLA; SAMPAIO; CODA, 2015](#); [PACCOLA; PIEDADE NETO; CODA, 2015](#); [PACCOLA; CODA, 2016](#)). O caráter inovador da presente pesquisa diz respeito aos tipos de elementos finitos utilizados, exigindo uma análise mais minuciosa para acoplar os graus de liberdade referentes à cinemática do elemento finito de casca.



## CAPÍTULO 2

# MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE ELÁSTICA NÃO-LINEAR

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos da mecânica do contínuo necessários para contextualizar o problema a ser resolvido. Num primeiro instante são definidas as relações que descrevem a mudança de configuração de um sólido considerando deslocamentos finitos. Para a aplicação do Método dos Elementos Finitos, é determinada a equação integral correspondente à forma fraca do equilíbrio. A forma fraca é obtida a partir da equação de equilíbrio local lagrangiana, que permite incorporar de forma natural a não-linearidade geométrica ao problema. Para completar a caracterização do problema, a representação do material é realizada por meio da lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff.

Após a definição do problema, apresentam-se os métodos de solução para integração temporal e para a resolução do sistema não-linear resultante. Por fim, discute-se acerca da estabilidade do equilíbrio, apresentando-se critérios para a determinação de pontos críticos em trajetórias de equilíbrio.

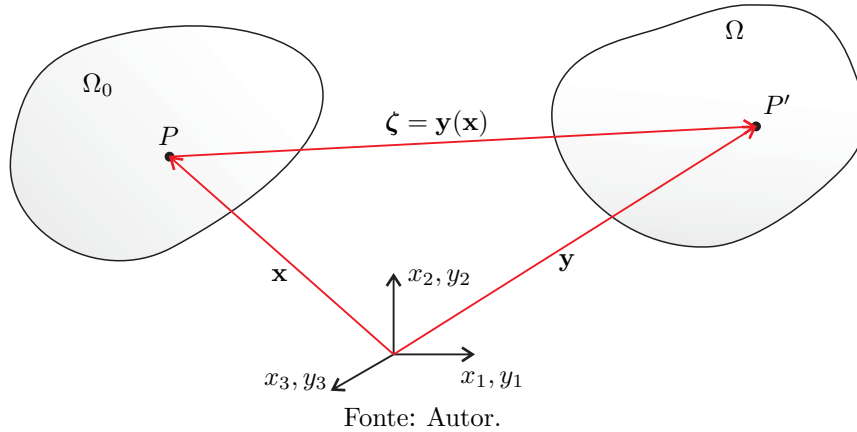
### 2.1 Mudança de configuração

A mudança de configuração de um sólido tridimensional pode ser descrita por meio de uma função  $\zeta : \Omega_0 \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ver [Figura 2](#), que fornece as coordenadas  $\mathbf{y} \in \Omega$  de um ponto material do sólido na configuração atual  $\Omega$  em função das coordenadas  $\mathbf{x} \in \Omega_0$  do ponto em um domínio de referência  $\Omega_0$ , geralmente a configuração inicial no caso de uma descrição Lagrangiana Total. A partir de características intrínsecas ao problema mecânico, pode-se afirmar que a função  $\zeta$  é bijetora e, portanto, admite inversa.

Admitindo-se que  $\zeta$  é diferenciável em  $\Omega_0$ , pode-se definir o gradiente de  $\zeta$ , denotado por  $\mathbf{A}$ , expresso como:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.1)$$

Figura 2 – Mudança de configuração de um sólido



De acordo com o Teorema da Decomposição Polar (OGDEN, 1984), existem dois únicos tensores positivos-definidos  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  e um tensor ortogonal  $\mathbf{R}$  tais que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.2)$$

sendo  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  denominados como alongamento à direita e alongamento à esquerda, respectivamente, e  $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , sendo  $\mathbf{I}$  o tensor identidade de segunda ordem.

O tensor  $\mathbf{R}$  representa a parcela de rotação de corpo rígido presente na mudança de configuração, enquanto que os tensores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  descrevem a deformação pura que ocorre no sólido, sendo estes últimos úteis para a determinação de medidas objetivas de deformação.

Nesse sentido, define-se a medida de deformação de Green-Lagrange, expressa como:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{C}$  é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, fornecido como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (2.4)$$

Da Equação (2.4), nota-se que o tensor  $\mathbf{C}$  depende apenas do tensor de deformações puras  $\mathbf{U}$ . Portanto, a medida de deformação de Green-Lagrange  $\mathbb{E}$ , que depende apenas de  $\mathbf{C}$ , constitui uma medida objetiva de deformação. Observa-se ainda que na configuração inicial  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  e, portanto,  $\mathbb{E} = \mathbf{0}$ .

## 2.2 Equilíbrio Lagrangiano

A equação de equilíbrio local realizada sobre a configuração de referência, ou equação de equilíbrio lagrangiana, é expressa como (OGDEN, 1984):



$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \quad (2.5)$$

em que  $\nabla_{\mathbf{x}}$  é um vetor que contém os operadores de derivada parcial com relação ao sistema de coordenadas de referência,  $\mathbf{P}$  é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie (não-simétrico),  $\mathbf{b}_0$  é a força de volume na configuração inicial,  $\rho_0$  é a massa específica do material na configuração inicial e  $\ddot{\mathbf{y}}$  é a aceleração.

Para se obter a forma fraca do equilíbrio, necessária para a aplicação do Método dos Elementos Finitos, pode-se aplicar o Método de Resíduos Ponderados sobre a Equação (2.5) e integração por partes, resultando em:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{P}^T : \delta \mathbf{A} d\Omega_0 = 0 \quad (2.6)$$

na qual  $\Omega_0$  é o domínio do sólido na configuração inicial,  $\Gamma_0$  é o contorno do sólido na configuração inicial,  $\mathbf{p}_0$  é o vetor de forças de superfície sobre a configuração inicial.

Da Equação (2.6) conclui-se que  $\mathbf{P}$  é conjugado energético de  $\mathbf{A}$ . Manipulando a última integral da Equação (2.6), pode-se demonstrar que o tensor de deformações de Green  $\mathbb{E}$  é conjugado energético do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $\mathbf{S}$ . Dessa forma, a expressão (2.6) pode ser então reescrita como:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbb{E} d\Omega_0 = 0 \quad (2.7)$$

sendo  $\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}^T$  um tensor simétrico.

A mesma expressão pode ser obtida a partir do princípio da conservação da energia mecânica. O princípio afirma que, na ausência de forças não-conservativas, a energia mecânica de um sistema é conservada, isto é, assume um valor constante no tempo. Considera-se a energia mecânica  $\Pi$  composta pelas parcelas de energia cinética  $\mathcal{K}$ , energia potencial das forças externas  $\mathcal{P}$  e energia de deformação  $\mathcal{U}$ . Sendo  $\Pi$  constante, a condição de equilíbrio é expressa como:

$$\delta \Pi = \delta \mathcal{K} + \delta \mathcal{P} + \delta \mathcal{U} = 0 \quad (2.8)$$

sendo

$$\delta \mathcal{K} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} d\Omega_0 \quad (2.9a)$$

$$\delta \mathcal{P} = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{p}_0 \cdot \delta \mathbf{y} d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y} d\Omega_0 \quad (2.9b)$$

$$\delta \mathcal{U} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbb{E} d\Omega_0 \quad (2.9c)$$

Quando há forças não-conservativas no sistema, como as que dependem da configuração da estrutura (força seguidora), as que dependem da velocidade ou as que variam no tempo, o princípio de conservação da energia mecânica não é mais aplicável a esse sistema (TAYLOR, 2005). No entanto, as contribuições relativas a essas forças podem ser adicionadas diretamente à Equação (2.8), mesmo que não existam as expressões para a energia potencial.

### 2.3 Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff

A lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff constitui uma relação linear entre o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformações de Green. Nesse sentido, a energia específica de deformação é expressa como:

$$u(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \mathbb{E} : \mathfrak{C} : \mathbb{E} \quad (2.10)$$

sendo  $\mathfrak{C}$  o tensor constitutivo elástico, expresso como:

$$\mathfrak{C} = 2G \left[ \mathfrak{J} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] \quad (2.11)$$

na qual  $\mathfrak{J}$  é o tensor identidade de quarta ordem,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $\otimes$  denota produto tensorial.

Da propriedade de conjugado energético, a derivada da energia específica de deformação com relação ao tensor de deformações de Green fornece o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial \mathbb{E}} \left( \frac{1}{2} \mathbb{E} : \mathfrak{C} : \mathbb{E} \right) = \frac{1}{2} (\mathfrak{J} : \mathfrak{C} : \mathbb{E} + \mathbb{E} : \mathfrak{C} : \mathfrak{J}) = \mathfrak{C} : \mathbb{E} \quad (2.12)$$

Substituindo a expressão (2.11) do tensor constitutivo em (2.12), obtém-se:

$$\mathbf{S} = 2G \left[ \mathbb{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\mathbb{E}) \mathbf{I} \right] \quad (2.13)$$

na qual o operador  $\text{tr}(\bullet)$  denota o traço de um tensor.

### 2.4 Equações de equilíbrio

Retoma-se a equação de equilíbrio global apresentada na expressão (2.7). Denotando por  $\Upsilon$  o vetor de parâmetros nodais, as variações presentes na equação podem ser escritas em função do vetor de variações  $\delta \Upsilon$  como:

$$\delta \mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{\Upsilon}} \cdot \delta \mathbf{\Upsilon} \quad (2.14a)$$

$$\delta \mathbb{E} = \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \mathbf{\Upsilon}} \cdot \delta \mathbf{\Upsilon} \quad (2.14b)$$

Assim, substituindo as expressões (2.14) na equação de equilíbrio (2.7) e considerando a arbitrariedade do vetor  $\delta \mathbf{\Upsilon}$ , obtém-se o seguinte sistema de equações de equilíbrio:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{\Upsilon}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \mathbf{\Upsilon}} d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} \mathbf{p}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{\Upsilon}} d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{\Upsilon}} d\Omega_0 = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

As derivadas presentes na expressão (2.15) são obtidas a partir da cinemática de cada elemento finito, conforme apresentado no [Capítulo 3](#).

A primeira parcela da expressão (2.15) corresponde à força de inércia  $\mathbf{f}^{iner}$ , a segunda parcela corresponde à força interna  $\mathbf{f}^{int}$  e as duas últimas parcelas correspondem à força externa  $\mathbf{f}^{ext}$ . Adicionalmente, uma parcela dissipativa decorrente do amortecimento de Rayleigh pode ser considerada, gerando uma força de amortecimento  $\mathbf{f}^{amort}$ . Dessa forma, o sistema de equações de equilíbrio é reescrito como:

$$\mathbf{f}^{iner} + \mathbf{f}^{amort} + \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

em que:

$$\mathbf{f}^{amort} = \int_{\Omega_0} c \rho_0 \dot{\mathbf{y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{\Upsilon}} d\Omega_0 \quad (2.17)$$

sendo  $c$  o coeficiente de amortecimento de Rayleigh (proporcional à massa) e  $\dot{\mathbf{y}}$  é a velocidade de um ponto material.

Com a finalidade de se garantir matriz de massa constante, estabelece-se a hipótese de que a posição  $\mathbf{y}$  é função linear dos parâmetros nodais  $\mathbf{\Upsilon}$ . Dessa forma, a velocidade  $\dot{\mathbf{y}}$  e a aceleração  $\ddot{\mathbf{y}}$  resultam funções lineares de  $\dot{\mathbf{\Upsilon}}$  e de  $\ddot{\mathbf{\Upsilon}}$ , respectivamente. Nesse contexto, pode-se escrever:

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{\Upsilon}} \cdot \dot{\mathbf{\Upsilon}} \quad (2.18a)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{\Upsilon}} \cdot \ddot{\mathbf{\Upsilon}} \quad (2.18b)$$

A partir das Equações (2.15) e (2.18), o sistema de equações de equilíbrio pode ser reescrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{\Upsilon}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{\Upsilon}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{\Upsilon}) - \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon}, t) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

em que  $t$  é a variável tempo,  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa e  $\mathbf{D} = c\mathbf{M}$  é a matriz de amortecimento. Com base nas hipóteses adotadas, a matriz de massa, expressa em notação indicial, resulta em:

$$M_{ij} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{\partial y_k}{\partial \Upsilon_i} \frac{\partial y_k}{\partial \Upsilon_j} d\Omega_0 \quad (2.20)$$

Na Equação (2.19), a força externa  $\mathbf{f}^{ext}$  foi considerada também dependente dos parâmetros nodais  $\Upsilon$  para englobar casos de força não-conservativa e contribuição exata de forças de domínio para cinemáticas definidas a partir de funções de mapeamento não-lineares com respeito aos parâmetros nodais. Considera-se também que a força externa é composta por uma parcela só dependente de  $\Upsilon$  e outra só dependente de  $t$ , isto é,  $\mathbf{f}^{ext}(\Upsilon, t) = \mathbf{f}_1^{ext}(\Upsilon) + \mathbf{f}_2^{ext}(t)$ . Desse modo, as derivações com relação a  $\Upsilon$  geram matrizes que não dependem do tempo.

Para elementos finitos de sólido bi ou tridimensional, a posição  $\mathbf{y}$  é dada pela interpolação dos valores nodais  $\Upsilon$ . Portanto, para estes elementos,  $\mathbf{y}$  é função linear de  $\Upsilon$  (ver seção 3.2). Em algumas cinemáticas especiais, como a do elemento finito de casca descrito na seção 3.3, pode ocorrer de a posição  $\mathbf{y}$  ser função não-linear dos parâmetros nodais  $\Upsilon$ . Nesses casos, as Equações (2.18), (2.19) e (2.20) não são aplicáveis. Todavia, pode-se adotar hipóteses simplificadoras sobre a cinemática do elemento, permitindo a aplicação das referidas equações.

## 2.5 Integração temporal - Método $\alpha$ -generalizado

Para a resolução do sistema de equações da expressão (2.19), uma discretização temporal deve ser adotada. Emprega-se aqui o integrador temporal baseado no método  $\alpha$ -generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993).

Para a aplicação do método, a expressão (2.19) é reescrita para o passo de tempo  $s + 1 - \alpha_f$ , exceto a parcela de força inercial, que é reescrita para o passo de tempo  $s + 1 - \alpha_m$ . Dessa forma, as equações de equilíbrio resultam em:

$$\mathbf{M}\ddot{\Upsilon}_{s+1-\alpha_m} + \mathbf{D}\dot{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f} + \mathbf{f}^{int}(\Upsilon_{s+1-\alpha_f}) - \mathbf{f}^{ext}(\Upsilon_{s+1-\alpha_f}, t_{s+1-\alpha_f}) = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

em que:

$$\ddot{\Upsilon}_{s+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m)\ddot{\Upsilon}_{s+1} + \alpha_m\ddot{\Upsilon}_s \quad (2.22a)$$

$$\dot{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\dot{\Upsilon}_{s+1} + \alpha_f\dot{\Upsilon}_s \quad (2.22b)$$

$$\Upsilon_{s+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\Upsilon_{s+1} + \alpha_f\Upsilon_s \quad (2.22c)$$

$$t_{s+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)t_{s+1} + \alpha_ft_s \quad (2.22d)$$

A relação entre as grandezas dos tempos  $s$  e  $s + 1$  é realizada por meio das aproximações do método de Newmark- $\beta$ , que são escritas como:

$$\mathbf{r}_{s+1} = \mathbf{r}_s + \dot{\mathbf{r}}_s \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{r}}_s + \beta \ddot{\mathbf{r}}_{s+1} \right] \Delta t^2 \quad (2.23a)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{s+1} = \dot{\mathbf{r}}_s + (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{r}}_s \Delta t + \gamma \ddot{\mathbf{r}}_{s+1} \Delta t \quad (2.23b)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são os parâmetros do método e  $\Delta t$  o intervalo de tempo adotado entre os passos  $s$  e  $s + 1$ .

De modo a escrever a equação de equilíbrio em função apenas do vetor de parâmetros nodais  $\mathbf{r}_{s+1}$  e das demais grandezas do passo  $s$ , isola-se  $\dot{\mathbf{r}}_{s+1}$  e  $\ddot{\mathbf{r}}_{s+1}$  das expressões (2.23), obtendo-se:

$$\dot{\mathbf{r}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{r}_{s+1} - \mathbf{r}_s) - \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{r}}_s - \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{r}}_s \quad (2.24a)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{s+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{r}_{s+1} - \mathbf{r}_s) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{r}}_s - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{r}}_s \quad (2.24b)$$

No início da análise,  $t = 0$ , consideram-se como condições iniciais  $\mathbf{r}_0$  e  $\dot{\mathbf{r}}_0$ . A aceleração inicial  $\ddot{\mathbf{r}}_0$  pode ser obtida a partir da Equação (2.21) como:

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{r}_0, 0) - \mathbf{f}^{int}(\mathbf{r}_0) - \mathbf{D}\dot{\mathbf{r}}_0] \quad (2.25)$$

em que as condições de contorno essenciais devem ser aplicadas à matriz  $\mathbf{M}$  e ao vetor resultante entre colchetes de modo a se garantir aceleração inicial nula nas vinculações.

Observa-se que, para a aplicação do método, é necessária a definição de 4 parâmetros:  $\alpha_f$ ,  $\alpha_m$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Os valores a serem definidos para esses parâmetros devem levar em consideração a melhora da convergência da solução e o controle da dissipação numérica. Nota-se também que, para  $\alpha_f = \alpha_m = 0$ , o método de Newmark- $\beta$  é reproduzido. Outros métodos podem ser reproduzidos a partir de combinações específicas de parâmetros, conforme observado por [Chung e Hulbert \(1993\)](#).

Com o objetivo de se conseguir um método incondicionalmente estável, precisão de segunda ordem e combinação ótima de dissipação de baixas e altas frequências, [Chung e Hulbert \(1993\)](#) determinaram um conjunto de parâmetros a serem empregados. Para aplicação em problemas lineares, o método possui precisão de segunda ordem quando:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (2.26)$$

De modo a maximizar a dissipação de altas frequências, o valor ótimo a ser adotado para o parâmetro  $\beta$  é:

$$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (2.27)$$

Os outros dois parâmetros podem ser escritos em função de um parâmetro  $\rho_\infty \in [0,1]$ , denominado raio espectral da zona de altas frequências. Este parâmetro é uma medida da dissipação das altas frequências. Para  $\rho_\infty = 1$  nenhuma dissipação numérica é introduzida, enquanto que para  $\rho_\infty = 0$  ocorre a chamada aniquilação assintótica, em que as altas frequências são aniquiladas após um passo de tempo. Desse modo, [Chung e Hulbert \(1993\)](#) mostram que os parâmetros  $\alpha_m$  e  $\alpha_f$ , respectivamente, se relacionam com  $\rho_\infty$  como:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad (2.28)$$

$$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (2.29)$$

Para problemas não-lineares, como o estudado no presente trabalho, não é garantida a precisão de segunda ordem nem a estabilidade do método. Entretanto, os parâmetros aqui apresentados podem constituir uma escolha ótima para problemas bem comportados.

## 2.6 Solução do sistema de equações não-lineares

A solução exata para o vetor de parâmetros nodais  $\Upsilon$  não é conhecida a priori. Portanto, para um vetor de parâmetros nodais tentativa, a expressão (2.21) resultará não nula, originando o seguinte resíduo:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\Upsilon_{s+1}) = & \mathbf{f}^{int}(\Upsilon_{s+1-\alpha_f}) - \mathbf{f}^{ext}(\Upsilon_{s+1-\alpha_f}, t_{s+1-\alpha_f}) + \\ & + (1 - \alpha_m)\mathbf{M}\ddot{\Upsilon}_{s+1} + \alpha_m\mathbf{M}\ddot{\Upsilon}_s + (1 - \alpha_f)\mathbf{D}\dot{\Upsilon}_{s+1} + \alpha_f\mathbf{D}\dot{\Upsilon}_s \end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo os vetores de velocidade e aceleração das Equações (2.24) na Equação (2.30), o resíduo passa a ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\Upsilon_{s+1}) = & \mathbf{f}^{int}(\Upsilon_{s+1-\alpha_f}) - \mathbf{f}^{ext}(\Upsilon_{s+1-\alpha_f}, t_{s+1-\alpha_f}) + \\ & + \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}\Upsilon_{s+1} + \frac{(1 - \alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{D}\Upsilon_{s+1} - \mathbf{g}_s \end{aligned} \quad (2.31)$$

em que  $\mathbf{g}_s$  é a parcela do vetor resíduo dependente apenas dos parâmetros do passo  $s$  e é expressa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_s = & \mathbf{M} \left[ \frac{1 - \alpha_m}{\beta\Delta t^2}\Upsilon_s + \frac{1 - \alpha_m}{\beta\Delta t}\dot{\Upsilon}_s + \frac{1 - \alpha_m - 2\beta}{2\beta}\ddot{\Upsilon}_s \right] + \\ & + \mathbf{D} \left[ \frac{(1 - \alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}\Upsilon_s + \frac{(1 - \alpha_f)\gamma - \beta}{\beta}\dot{\Upsilon}_s + \frac{(\gamma - 2\beta)(1 - \alpha_f)}{2\beta}\Delta t\ddot{\Upsilon}_s \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Para a minimização do resíduo aplicou-se o método de Newton-Raphson. Dessa forma, expande-se o resíduo em série de Taylor:

$$\mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1} + \Delta\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) = \mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) + \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1})}{\partial\mathbf{\Upsilon}_{s+1}} \cdot \Delta\mathbf{\Upsilon}_{s+1} + \mathcal{O}(\Delta\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

em que  $\mathcal{O}(\Delta\mathbf{\Upsilon}_{s+1})$  são os termos de ordem superior e a derivada do resíduo com relação ao vetor de parâmetros nodais é denominada matriz hessiana ou matriz de rigidez tangente. Desse modo, a matriz hessiana resulta em:

$$\mathbf{H}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) = \frac{\partial\mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1})}{\partial\mathbf{\Upsilon}_{s+1}} = \left[ \frac{\partial\mathbf{f}^{int}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f})}{\partial\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f}} - \frac{\partial\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f})}{\partial\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f}} \right] \cdot \frac{\partial\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f}}{\partial\mathbf{\Upsilon}_{s+1}} + \frac{(1-\alpha_m)}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{D} \quad (2.34)$$

Da Equação (2.22c), tem-se que a derivada de  $\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f}$  com relação a  $\mathbf{\Upsilon}_{s+1}$  é igual a  $(1-\alpha_f)\mathbf{I}$ . Assim, a matriz hessiana é finalmente expressa como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) = (1-\alpha_f)\mathbf{H}^{est}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f}) + \frac{(1-\alpha_m)}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{D} \quad (2.35)$$

sendo  $\mathbf{H}^{est}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f})$  a matriz hessiana calculada para o problema estático na configuração intermediária  $\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f}$  e expressa como:

$$\mathbf{H}^{est}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f}) = \frac{\partial\mathbf{f}^{int}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f})}{\partial\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f}} - \frac{\partial\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f})}{\partial\mathbf{\Upsilon}_{s+1-\alpha_f}} \quad (2.36)$$

A derivada da força interna com relação aos parâmetros nodais pode ser obtida a partir da segunda integral da Equação (2.15), e resulta em:

$$\frac{\partial\mathbf{f}^{int}}{\partial\mathbf{\Upsilon}} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial\mathbb{E}}{\partial\mathbf{\Upsilon}} : \mathbf{e} : \frac{\partial\mathbb{E}}{\partial\mathbf{\Upsilon}} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{s} : \frac{\partial^2\mathbb{E}}{\partial\mathbf{\Upsilon} \otimes \partial\mathbf{\Upsilon}} d\Omega_0 \quad (2.37)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior da Equação (2.33), a correção da solução é obtida a partir do seguinte sistema linear:

$$\Delta\mathbf{\Upsilon}_{s+1} = -[\mathbf{H}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1})]^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) \quad (2.38)$$

O vetor de parâmetros nodais  $\mathbf{\Upsilon}_{s+1}$  é então atualizado pela correção  $\Delta\mathbf{\Upsilon}_{s+1}$  fornecida pela Equação (2.38). Esse procedimento é repetido para cada nova solução tentativa gerada, até que a norma da correção  $\Delta\mathbf{\Upsilon}_{s+1}$  ou do resíduo  $\mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1})$  se torne suficientemente pequena, encontrando-se assim a solução procurada. Após cada atualização de  $\mathbf{\Upsilon}_{s+1}$ , atualiza-se também o vetor de velocidades  $\dot{\mathbf{\Upsilon}}_{s+1}$  e o de acelerações  $\ddot{\mathbf{\Upsilon}}_{s+1}$  por meio das Equações (2.24).

Para a resolução de problemas estáticos, basta desprezar as parcelas de forças de inércia e de amortecimento e adotar  $\alpha_f = 0$ . Adicionalmente, considera-se que a força externa é controlada por um fator  $\lambda$ , de modo que o resíduo possa ser escrito como:

$$\mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) - \lambda \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) \quad (2.39)$$

Assim, para o caso estático a matriz hessiana é fornecida como:

$$\mathbf{H}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) = \mathbf{H}^{est}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1})}{\partial \mathbf{\Upsilon}_{s+1}} = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1})}{\partial \mathbf{\Upsilon}_{s+1}} - \lambda \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon}_{s+1})}{\partial \mathbf{\Upsilon}_{s+1}} \quad (2.40)$$

As correções são também obtidas via Equação (2.38). Cada passo do problema estático pode ser realizado com incrementos em  $\lambda$  (controle de força) ou em  $\mathbf{\Upsilon}$  (controle de posição). Desse modo, o conjunto das soluções obtidas geram a chamada trajetória de equilíbrio. Para trajetórias com um determinado grau de complexidade, essa análise incremental falha. Visando contornar esse cenário, no [Capítulo 4](#) é apresentada uma estratégia mais geral para a obtenção dessas trajetórias.

## 2.7 Estabilidade do equilíbrio estático

Em termos energéticos, a estabilidade de uma estrutura pode ser determinada a partir de variações do funcional de energia potencial total. A nulidade da primeira variação do funcional de energia potencial fornece a condição de equilíbrio estático e corresponde ao enunciado do princípio da energia potencial total estacionária. A segunda variação fornece condições suficientes para classificar o equilíbrio como estável ou instável. Para casos em que a verificação da segunda variação não é suficiente, a determinação de variações de ordem superior é necessária.

De modo a organizar esses conceitos, define-se a energia potencial total  $U$  como a soma da energia potencial das forças externas (conservativas)  $\mathcal{P}$  com a energia de deformação  $\mathcal{U}$  (ou energia potencial elástica), isto é,  $U = \mathcal{P} + \mathcal{U}$ . Expande-se inicialmente o funcional  $U$  em série de Taylor:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{\Upsilon} + \delta \mathbf{\Upsilon}, \lambda) &= U(\mathbf{\Upsilon}, \lambda) + \frac{1}{1!} \frac{\partial U(\mathbf{\Upsilon}, \lambda)}{\partial \Upsilon_i} \delta \Upsilon_i + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 U(\mathbf{\Upsilon}, \lambda)}{\partial \Upsilon_i \partial \Upsilon_j} \delta \Upsilon_i \delta \Upsilon_j + \dots \\ &= U(\mathbf{\Upsilon}, \lambda) + \delta U(\mathbf{\Upsilon}, \lambda) + \frac{1}{2} \delta^2 U(\mathbf{\Upsilon}, \lambda) + \dots \end{aligned} \quad (2.41)$$

A primeira variação  $\delta U$  e a segunda variação  $\delta^2 U$  são expressas respectivamente como:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \Upsilon_i} \delta \Upsilon_i = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{\Upsilon}} \cdot \delta \mathbf{\Upsilon} \quad (2.42)$$



$$\delta^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial \Upsilon_i \partial \Upsilon_j} \delta \Upsilon_i \delta \Upsilon_j = \delta \Upsilon \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \Upsilon \otimes \partial \Upsilon} \cdot \delta \Upsilon = \delta \Upsilon^T \mathbf{H} \delta \Upsilon \quad (2.43)$$

em que  $\mathbf{H}$  é a matriz hessiana determinada para o problema estático, que, retomando as Equações (2.40) e (2.37), resulta em:

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \Upsilon} : \mathbf{e} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \Upsilon} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \Upsilon \otimes \partial \Upsilon} d\Omega_0 - \lambda \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \Upsilon} \quad (2.44)$$

Uma condição suficiente para que o equilíbrio seja estável é o descrito pelo teorema de Lagrange-Dirichlet. O teorema afirma que, assumindo a energia potencial do sistema como sendo contínua, o equilíbrio de um sistema que contém apenas forças conservativas e dissipativas é estável se a energia potencial possui um mínimo local, ou seja, se possui segunda variação positiva (BAŽANT; CEDOLIN, 2010).

A partir do teorema de Lagrange-Dirichlet, conclui-se que uma condição suficiente para um sistema ser estável é:

$$\delta \Upsilon^T \mathbf{H} \delta \Upsilon > 0 \quad \forall \delta \Upsilon \neq \mathbf{0} \quad (2.45)$$

sendo  $\mathbf{H}$  a matriz hessiana já com as condições de contorno essenciais aplicadas.

Quando a Equação (2.45) é satisfeita, a matriz  $\mathbf{H}$  é dita positiva definida. Sendo  $\mathbf{H}$  uma matriz simétrica, o teorema de Lagrange-Dirichlet permite concluir que uma condição suficiente para a estabilidade do equilíbrio é a matriz hessiana possuir todos os autovalores positivos.

Uma condição suficiente para o equilíbrio ser instável é enunciado pelo primeiro teorema de Liapunov. O teorema afirma que se a energia potencial na configuração de equilíbrio não é mínima e se a ausência de um mínimo é causada pelos termos de segunda ordem na expansão em série de Taylor da energia potencial, então o sistema é instável (BAŽANT; CEDOLIN, 2010). Em outras palavras, se  $\delta^2 U < 0$  para algum  $\delta \Upsilon \neq \mathbf{0}$ , ou equivalentemente, se a matriz  $\mathbf{H}$ , em sendo simétrica, possui pelo menos um autovalor negativo, o sistema é instável. Em particular, se todos os autovalores são negativos, a matriz é dita negativa definida e o sistema é instável.

Define-se como estado crítico de limite de estabilidade o ponto no qual a segunda variação cessa de ser positiva definida. Nessa situação, tem-se que  $\delta^2 U = 0$  para algum  $\delta \Upsilon \neq \mathbf{0}$  e  $\delta^2 U > 0$  para todos os demais  $\delta \Upsilon \neq \mathbf{0}$ . Considerando inicialmente o caso de a matriz  $\mathbf{H}$  ser simétrica, o estado crítico de limite de estabilidade é obtido quando a matriz  $\mathbf{H}$  apresentar pelo menos um autovalor nulo e todos os demais autovalores positivos, sendo esta uma condição necessária e suficiente (BAŽANT; CEDOLIN, 2010).

Sabe-se da Álgebra Linear que uma matriz simétrica possui todos os autovalores reais e é sempre diagonalizável. Nesse caso, a diagonalização pode sempre ser realizada

por meio de matrizes de transformação ortogonais  $\mathbf{Q}$ , isto é,  $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{Q}$ , em que  $\mathbf{D}$  é a matriz diagonalizada. A diagonal da matriz  $\mathbf{D}$  é composta pelos autovalores da matriz  $\mathbf{H}$  e a matriz  $\mathbf{Q}$  possui as seguintes propriedades de interesse:  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$  e  $\det(\mathbf{Q}) = \pm 1$ . Assim, o determinante da matriz  $\mathbf{H}$  pode ser obtido como:

$$\det(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{H}) \det^2(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{H}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \dots \lambda_N \quad (2.46)$$

em que  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N$  são todos os  $N$  autovalores da matriz  $\mathbf{H}$ .

A partir da Equação (2.46), pode-se afirmar que o estado crítico de limite de estabilidade ocorre quando:

$$\det(\mathbf{H}) = 0 \quad (2.47)$$

Considerando agora a hipótese de  $\mathbf{H}$  não ser simétrica, o que geralmente ocorre quando existem forças não-conservativas no sistema, a Equação (2.47) deixa de ser condição necessária e suficiente para a determinação do estado crítico de limite de estabilidade. Para avaliar o motivo de tal afirmação, retoma-se a seguinte definição de estado crítico de limite de estabilidade:

$$\delta\mathbf{\Upsilon}^T \mathbf{H} \delta\mathbf{\Upsilon} = 0 \quad \text{para algum } \delta\mathbf{\Upsilon} \neq \mathbf{0} \quad (2.48)$$

A operação matricial do lado esquerdo da Equação (2.48) resulta num escalar. Assim, pode-se tomar seu transposto para gerar uma definição equivalente:

$$(\delta\mathbf{\Upsilon}^T \mathbf{H} \delta\mathbf{\Upsilon})^T = \delta\mathbf{\Upsilon}^T \mathbf{H}^T \delta\mathbf{\Upsilon} = 0 \quad \text{para algum } \delta\mathbf{\Upsilon} \neq \mathbf{0} \quad (2.49)$$

Das Equações (2.48) e (2.49), observa-se que tanto a matriz  $\mathbf{H}$  quanto sua transposta  $\mathbf{H}^T$  são igualmente válidas para a determinação do estado crítico. Portanto, a soma  $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$  e até mesmo a parte simétrica  $\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)/2$  permitem, sem perda de generalidade, constituir condições equivalentes. De fato, para o caso da parte simétrica tem-se:

$$\delta\mathbf{\Upsilon}^T \hat{\mathbf{H}} \delta\mathbf{\Upsilon} = \delta\mathbf{\Upsilon}^T \left( \frac{\mathbf{H} + \mathbf{H}^T}{2} \right) \delta\mathbf{\Upsilon} = \frac{1}{2} (\delta\mathbf{\Upsilon}^T \mathbf{H} \delta\mathbf{\Upsilon} + \delta\mathbf{\Upsilon}^T \mathbf{H}^T \delta\mathbf{\Upsilon}) \quad (2.50)$$

Ao aplicar as Equações (2.48) e (2.49) na Equação (2.50), a expressão desta última se anula. Portanto, a seguinte condição de estado crítico de limite de estabilidade é obtida:

$$\delta\mathbf{\Upsilon}^T \hat{\mathbf{H}} \delta\mathbf{\Upsilon} = 0 \quad \text{para algum } \delta\mathbf{\Upsilon} \neq \mathbf{0} \quad (2.51)$$

Como a matriz  $\hat{\mathbf{H}}$  é simétrica, valem as mesmas propriedades descritas anteriormente. Nota-se ainda que se  $\mathbf{H}$  é uma matriz simétrica, então  $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ . Dessa forma, demonstra-se

que uma condição mais geral para a determinação do estado crítico de limite de estabilidade é expressa como:

$$\det(\hat{\mathbf{H}}) = 0 \quad (2.52)$$

Um fato interessante de se observar é que, quando se tem uma matriz  $\mathbf{H}$  simétrica, o estado crítico de limite de estabilidade ocorre apenas quando  $\mathbf{H}\delta\mathbf{Y} = \mathbf{0}$  para algum  $\delta\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ . Neste caso, diz-se que a estrutura atingiu um estado de equilíbrio neutro. Sendo a matriz  $\mathbf{H}$  não-simétrica, além do caso  $\mathbf{H}\delta\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ , o estado crítico de limite de estabilidade pode ocorrer também quando se tem  $\mathbf{H}\delta\mathbf{Y} = \delta\mathbf{f}$ , sendo  $\delta\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$  um vetor ortogonal a  $\delta\mathbf{Y} \neq \mathbf{0}$ , o que acarreta em  $\delta\mathbf{Y}^T\delta\mathbf{f} = 0$ . Observa-se que este último caso é garantido apenas com  $\det(\mathbf{H}) \neq 0$  e não corresponde a um estado de equilíbrio neutro.

Os autovalores de  $\mathbf{H}$  e  $\hat{\mathbf{H}}$  podem ser relacionados entre si pelos chamados limites de Bromwich (BROMWICH, 1906). Essa relação é formalizada pelo teorema que afirma que todo autovalor  $\lambda \in \mathbb{C}$  de uma matriz não-simétrica  $\mathbf{H}$  satisfaz às seguintes desigualdades, denominadas limites de Bromwich:

$$\hat{\lambda}_1 \leq \text{Re}(\lambda) \leq \hat{\lambda}_n \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda}_1 \leq \text{Im}(\lambda) \leq \tilde{\lambda}_n \quad (2.53)$$

em que  $\hat{\lambda}_1$  e  $\hat{\lambda}_n$  são o menor e o maior autovalor, respectivamente, da matriz simétrica  $\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)/2$ , e  $\tilde{\lambda}_1$  e  $\tilde{\lambda}_n$  são o menor e o maior autovalor, respectivamente, da matriz hermitiana antissimétrica  $\tilde{\mathbf{H}} = (\mathbf{H} - \mathbf{H}^T)/(2i)$ , sendo  $i$  a unidade imaginária. Tem-se também que  $\text{Re}(\lambda)$  e  $\text{Im}(\lambda)$  denotam parte real e parte imaginária, respectivamente, do número complexo  $\lambda$ . Uma prova deste teorema pode ser encontrada em Bažant e Cedolin (2010).

Em resumo, uma estrutura que apresenta matriz hessiana  $\mathbf{H}$  não-simétrica possui dois tipos de estados críticos: estado crítico de equilíbrio neutro ( $\det(\mathbf{H}) = 0$ ) e estado crítico de limite de estabilidade ( $\det(\hat{\mathbf{H}}) = 0$ ). A partir dos limites de Bromwich, pode-se concluir que a carga crítica de equilíbrio neutro nunca será menor que a carga crítica de limite de estabilidade. Por este motivo, no presente trabalho é considerada apenas a determinação desta última.

Os teoremas de Lagrange-Dirichlet e de Liapunov, quando enunciado em termos do sinal da segunda variação, são igualmente válidos para matrizes  $\mathbf{H}$  não-simétricas. Entretanto, a conclusão a respeito dos autovalores é válida apenas quando se considera a parte simétrica  $\hat{\mathbf{H}}$ . Dessa forma, a partir do teorema de Lagrange-Dirichlet conclui-se que uma condição suficiente para o equilíbrio ser estável é que a matriz  $\hat{\mathbf{H}}$ , e não a matriz  $\mathbf{H}$ , possua todos os autovalores positivos. Da mesma forma, conclui-se a partir do teorema de Liapunov que uma condição suficiente para o equilíbrio ser instável é que a matriz  $\hat{\mathbf{H}}$  possua pelo menos um autovalor negativo.

Observa-se que a matriz hessiana fornecida pela Equação (2.44) possui três parcelas. Em pequenos deslocamentos, a primeira parcela corresponde à matriz de rigidez linear, sendo denominada parcela elástica  $\mathbf{H}^E$ . A segunda parcela é diretamente proporcional ao nível de tensão atuante, sendo denominada parcela geométrica  $\mathbf{H}^G$ . A terceira parcela é diretamente relacionada com o nível de carga atuante, sendo denominada parcela de carregamento  $\mathbf{H}^L$ , e está presente apenas na presença de forças não-conservativas e demais forças dependentes dos parâmetros nodais. Essas três parcelas são expressas, respectivamente, como:

$$\mathbf{H}^E = \int_{\Omega_0} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \boldsymbol{\Upsilon}} : \boldsymbol{\epsilon} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \boldsymbol{\Upsilon}} d\Omega_0 \quad (2.54)$$

$$\mathbf{H}^G = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial \boldsymbol{\Upsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\Upsilon}} d\Omega_0 \quad (2.55)$$

$$\mathbf{H}^L = -\lambda \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \boldsymbol{\Upsilon}} \quad (2.56)$$

Considera-se agora que  $\lambda$  é o fator de carga atual e  $\lambda_{cr}$  é o fator de carga crítico (que leva ao estado crítico de limite de estabilidade). Define-se também um parâmetro adicional  $\mu$  igual à razão entre os fatores de carga crítico e atual, isto é,  $\mu = \lambda_{cr}/\lambda$ . Assim, o tensor de tensões no ponto crítico é estimado por  $\mu \mathbf{S}$  e o fator de carga crítico é  $\mu \lambda$ . Nesse contexto, a expressão (2.52), referente à determinação do estado crítico de limite de estabilidade, pode ser reescrita como:

$$\det \left[ \hat{\mathbf{H}}^E + \mu \left( \hat{\mathbf{H}}^G + \hat{\mathbf{H}}^L \right) \right] = 0 \quad (2.57)$$

sendo  $\hat{\mathbf{H}}^E$ ,  $\hat{\mathbf{H}}^G$  e  $\hat{\mathbf{H}}^L$  as partes simétricas de  $\mathbf{H}^E$ ,  $\mathbf{H}^G$  e  $\mathbf{H}^L$ , respectivamente.

A expressão (2.57) pode ser interpretada como sendo o polinômio característico do seguinte problema generalizado de autovalor:

$$\left[ \hat{\mathbf{H}}^E + \mu^{(k)} \left( \hat{\mathbf{H}}^G + \hat{\mathbf{H}}^L \right) \right] \delta \boldsymbol{\Upsilon}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (2.58)$$

sendo  $\mu^{(k)}$  o  $k$ -ésimo autovalor e  $\delta \boldsymbol{\Upsilon}^{(k)}$  o  $k$ -ésimo autovetor. Para um determinado autovalor  $\mu^{(k)}$ , a família de soluções não-triviais  $\delta \boldsymbol{\Upsilon}^{(k)} \neq \mathbf{0}$  corresponde ao modo de instabilidade associado a  $\mu^{(k)}$ . Quando  $\lambda$  se aproxima de  $\lambda_{cr}$  o menor autovalor se aproxima de 1. No limite  $\lambda = \lambda_{cr}$  diz-se que o estado crítico de limite de estabilidade foi alcançado.

O problema generalizado de autovalor da Equação (2.58) é resolvido neste trabalho por meio da biblioteca numérica ARPACK (LEHOUCQ; SORENSEN; YANG, 1998). O algoritmo numérico implementado na biblioteca ARPACK é denominado *Implicit Restarted Lanczos method* (IRLM), o qual é eficiente para a busca de um pequeno número de

autovalores dentro de um determinado espectro de interesse. A biblioteca foi implementada inicialmente em linguagem FORTRAN 77 e posteriormente foi desenvolvida uma interface para C++, denominada ARPACK++, a qual foi utilizada para o presente trabalho.

A análise realizada quando as matrizes envolvidas no problema de autovalor da Equação (2.58) são avaliadas sobre a configuração inicial é denominada análise linear de estabilidade (ou *buckling analysis*, em inglês). Nesse caso, a carga crítica é obtida sob a hipótese de variação linear do tensor de tensões em função do carregamento aplicado e todos os demais termos que dependem dos parâmetros nodais são avaliados na configuração inicial. Dessa forma, a carga crítica obtida constitui uma estimativa, e se torna mais próxima do seu valor real quanto mais o comportamento da estrutura se aproximar das hipóteses adotadas.

A extensão desta análise para o regime de grandes deslocamentos parte da consideração de que uma análise linear de estabilidade pode ser realizada sobre cada ponto de equilíbrio obtido ao longo da trajetória, não apenas sobre a configuração inicial. Assim, quanto mais perto o ponto de equilíbrio analisado está do ponto crítico, mais precisa é a estimativa da carga crítica obtida. Como no trecho de equilíbrio estável (anterior ao ponto crítico) tem-se  $\lambda < \lambda_{cr}$ , o menor autovalor  $\mu$  resulta sempre maior que 1. No caso particular em que  $\lambda = \lambda_{cr}$ , o menor autovalor resulta igual a 1 e diz-se que a análise atingiu um ponto crítico de instabilidade. Neste último caso, o fator de carga atual se torna o fator de carga crítico exato para a discretização em elementos finitos adotada.



## CAPÍTULO 3

### CINEMÁTICA DOS ELEMENTOS FINITOS

Para a determinação dos campos de deslocamentos e de deformações do sólido, definem-se as expressões para a função mudança de configuração  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x})$ . Essas expressões são dependentes da cinemática do elemento finito empregado. Definindo-se um domínio adimensional de referência, as configurações inicial e atual podem ser mapeadas a partir deste domínio por meio das funções  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\zeta}^0(\boldsymbol{\xi})$  e  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\zeta}^1(\boldsymbol{\xi})$ , respectivamente, sendo  $\boldsymbol{\xi}$  o vetor de coordenadas no espaço adimensional. Dessa forma, a função mudança de configuração pode ser escrita como uma composição das funções de mapeamento:

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}^1 \circ (\boldsymbol{\zeta}^0)^{-1} \quad (3.1)$$

Para a definição de medidas de deformação, é de interesse a obtenção do gradiente da função mudança de configuração. Esse gradiente pode ser obtido aplicando-se a regra da cadeia sobre a Equação (3.1), obtendo-se:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A}^1 (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (3.2)$$

em que  $\mathbf{A}^0 = \partial \boldsymbol{\zeta}^0 / \partial \boldsymbol{\xi}$  e  $\mathbf{A}^1 = \partial \boldsymbol{\zeta}^1 / \partial \boldsymbol{\xi}$ .

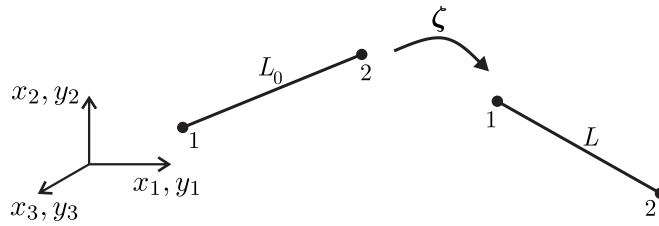
A partir do gradiente da função mudança de configuração, o tensor de deformações de Green-Lagrange  $\mathbb{E}$ , Equação (2.3), pode ser determinado. A Equação (3.2) é aplicável diretamente a cinemáticas cujo domínio adimensional de referência tenha a mesma dimensão do domínio do sólido, acarretando em matrizes quadradas para os gradientes  $\mathbf{A}^0$  e  $\mathbf{A}^1$ . Dessa forma, é possível a obtenção da inversa de  $\mathbf{A}^0$  a ser usada na Equação (3.2). Cinemáticas que fogem a essa regra são tratadas como casos particulares.

Na próxima seção é apresentada a cinemática do elemento finito de barra simples. Em seguida, apresentam-se as cinemáticas do elemento de sólido tridimensional e do elemento de casca. Para resolver o problema de não-unicidade de vetores generalizados de um mesmo nó entre elementos de casca, uma estratégia de acoplamento é também apresentada. Por fim, apresenta-se a dedução da parcela de força externa não-conservativa, mais especificamente pressão seguidora, atuando na superfície do elemento finito de casca.

### 3.1 Elemento finito de barra simples

A mudança de configuração do elemento finito de barra simples (ou de treliça) é ilustrada na [Figura 3](#), em que  $L_0$  é o comprimento do elemento na configuração de referência (inicial) e  $L$  é o seu comprimento na configuração atual. O vetor de parâmetros nodais  $\Upsilon$  para este elemento é composto pelas posições atuais  $\mathbf{y}^1$  e  $\mathbf{y}^2$  dos nós inicial e final, respectivamente.

Figura 3 – Mudança de configuração do elemento finito de treliça



Fonte: Autor.

Devido a ausência de rigidez a deslocamentos transversais, a descrição unidimensional da cinemática deste elemento é suficiente. Assim, a deformação de Green-Lagrange pode ser definida como uma grandeza escalar em função dos comprimentos  $L_0$  e  $L$  a partir da seguinte expressão:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{L^2}{L_0^2} - 1 \right) \quad (3.3)$$

Considerando a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, a energia específica de deformação unidimensional é dada por:

$$u = \frac{1}{2} E \mathbb{E}^2 \quad (3.4)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal.

A energia de deformação do elemento é obtida a partir da integração da Equação (3.4) sobre o volume inicial do elemento, em acordo com a descrição Lagrangiana Total, resultando em:

$$\mathcal{U} = \int_{V_0} u dV_0 = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \mathbb{E}^2 dV_0 = \frac{1}{2} E \mathbb{E}^2 A_0 L_0 = u A_0 L_0 \quad (3.5)$$

em que  $A_0$  é a área da seção transversal do elemento, assumida constante.

O vetor de forças internas é obtido a partir da derivação da energia interna com relação às posições nodais. Assim, a força interna na direção  $i$  de um nó  $\alpha$  é expressa como:



$$(f^{int})_i^\alpha = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y_i^\alpha} = \frac{\partial u}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial y_i^\alpha} A_0 L_0 = S \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial y_i^\alpha} A_0 L_0 \quad (3.6)$$

em que  $S = E\mathbb{E}$  é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

A parcela da matriz hessiana proveniente do elemento de treliça é obtida a partir da segunda derivada da energia interna com relação às posições nodais:

$$H_{pq} = \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} = \left( E \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial y_i^\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial y_j^\beta} + S \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} \right) A_0 L_0 \quad (3.7)$$

em que nó  $\alpha$  e direção  $i$  compõem o grau de liberdade  $p$  e nó  $\beta$  e direção  $j$  compõem o grau de liberdade  $q$ .

As expressões para as derivadas da deformação de Green-Lagrange presentes nas expressões (3.6) e (3.7) são fornecidas como:

$$\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial y_i^\alpha} = \frac{(-1)^\alpha}{L^2} (y_i^2 - y_i^1) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial y_i^\alpha \partial y_j^\beta} = \frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{L^2} \delta_{ij} \quad (3.9)$$

Para a aplicação deste elemento em problemas dinâmicos, é necessária a definição da matriz de massa. Considerando a linearidade da cinemática com relação aos parâmetros nodais, a matriz de massa consistente pode ser obtida diretamente a partir da Equação (2.20):

$$M_{ij} = \int_{V_0} \rho_0 \frac{\partial y_k}{\partial \Upsilon_i} \frac{\partial y_k}{\partial \Upsilon_j} dV_0 = \int_{L_0} \rho_0 A_0 \phi^\beta \phi^z \delta_{\alpha\gamma} dL_0 \quad (3.10)$$

sendo o grau de liberdade  $i$  composto por nó  $\beta$  e direção  $\alpha$  e grau de liberdade  $j$  composto por nó  $z$  e direção  $\gamma$ . Tem-se também que  $\phi^\beta$  e  $\phi^z$  são funções de forma lineares para nó  $\beta$  e nó  $z$ , respectivamente.

A integração analítica da Equação (3.10) resulta na seguinte expressão para a matriz de massa:

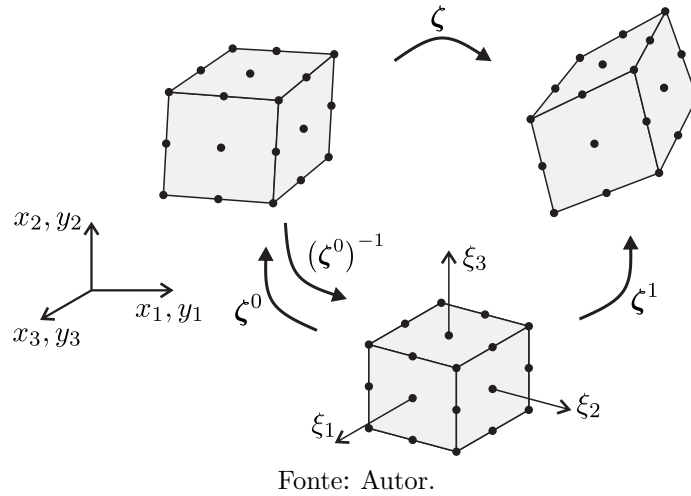
$$M_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3} \rho_0 A_0 L_0 \delta_{\alpha\gamma} & \text{se } \beta = z \\ \frac{1}{6} \rho_0 A_0 L_0 \delta_{\alpha\gamma} & \text{se } \beta \neq z \end{cases} \quad (3.11)$$

Uma alternativa à matriz de massa consistente é a matriz de massa diagonal, em que a massa do elemento é considerada concentrada nos nós. Sabendo que as aplicações numéricas a serem realizadas envolverão o uso de diferentes elementos finitos, para os quais a matriz de massa consistente é a mais indicada, não há vantagem na utilização da matriz de massa diagonal para o elemento de treliça.

### 3.2 Elemento finito de sólido tridimensional

O elemento finito de sólido tridimensional aqui descrito também foi apresentado em Maciel (2008). A mudança de configuração e as funções de mapeamento para o referido elemento estão ilustradas na Figura 4. Na figura, a configuração inicial é descrita pelo sistema de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  e a configuração atual pelo sistema de coordenadas  $(y_1, y_2, y_3)$ , que são coincidentes em virtude da descrição Lagrangiana Total do equilíbrio.

Figura 4 – Mudança de configuração do elemento finito de sólido tridimensional



As funções de mapeamento do elemento de sólido tridimensional são dadas pela interpolação dos valores nodais de posição:

$$\zeta^0(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \phi^k(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}^k \quad (3.12)$$

$$\zeta^1(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) = \phi^k(\boldsymbol{\xi})\mathbf{y}^k \quad (3.13)$$

em que  $\mathbf{x}^k$  e  $\mathbf{y}^k$  correspondem às posições inicial e atual do nó  $k$ , respectivamente, e  $\phi^k(\boldsymbol{\xi})$  corresponde à função de forma associada ao nó  $k$ . Para este elemento finito, o vetor de parâmetros nodais  $\boldsymbol{\Upsilon}$  é composto pelas posições  $\mathbf{y}^k$ .

A matriz de massa, definida de forma genérica na Equação (2.20), é expressa para o elemento finito de sólido, considerando as Equações (3.12) e (3.13), como:

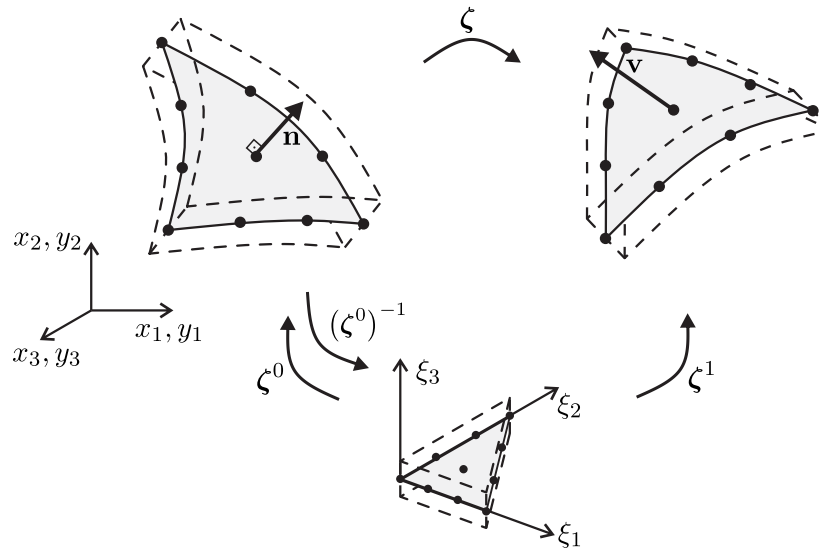
$$M_{ij} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \phi^\beta \phi^\gamma \delta_{\alpha\gamma} d\Omega_0 \quad (3.14)$$

em que nó  $\beta$  e direção  $\alpha$  compõem o grau de liberdade  $i$  e nó  $z$  e direção  $\gamma$  compõem o grau de liberdade  $j$ .

### 3.3 Elemento finito de casca

O elemento finito de casca aqui empregado possui 7 parâmetros nodais foi desenvolvido por [Coda e Paccola \(2008\)](#). A cinemática do elemento compreende a utilização de vetores generalizados para a descrição consistente de rotações. Além disso, um parâmetro adicional referente à taxa de variação da espessura é considerado, gerando uma cinemática mais geral que a de Reissner-Mindlin e reduzindo o travamento volumétrico ([CODA; PACCOLA, 2008](#)). A mudança de configuração e as funções de mapeamento para este elemento finito estão ilustradas na [Figura 5](#).

Figura 5 – Mudança de configuração do elemento finito de casca



Fonte: Autor.

Para o elemento finito de casca, as funções de mapeamento são escritas como:

$$\zeta^0(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \phi^k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}^k + \frac{h_0}{2} \xi_3 \phi^k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{n}^k \quad (3.15)$$

$$\zeta^1(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) = \phi^k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{y}^k + \frac{h_0}{2} \left[ \xi_3 + \phi^m(\xi_1, \xi_2) a^m \xi_3^2 \right] \phi^k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{v}^k \quad (3.16)$$

em que  $h_0$  é a espessura inicial do elemento de casca,  $\phi^k(\xi_1, \xi_2)$  é a função de forma do nó  $k$ ,  $\mathbf{x}^k$  e  $\mathbf{y}^k$  são as posições nas configurações inicial e atual, respectivamente, do nó  $k$ ,  $\mathbf{n}^k$  é o vetor normal do nó  $k$  na configuração inicial,  $\mathbf{v}^k$  é o vetor generalizado do nó  $k$  na configuração atual e  $a^m$  é a taxa de variação da espessura do nó  $m$ . Para este elemento finito, o vetor de parâmetros nodais  $\boldsymbol{\Upsilon}$  engloba os parâmetros  $\mathbf{y}^k$ ,  $\mathbf{v}^k$  e  $a^k$  de cada nó  $k$  do elemento.

Foi empregado nas discretizações o elemento finito triangular de 10 nós, correspondente à aproximação polinomial cúbica. Este elemento é conhecido por ter bom desempenho,

evitando travamentos decorrentes da utilização da cinemática de Reissner-Mindlin em conjunto com lei constitutiva tridimensional completa (CODA; PACCOLA, 2008).

Observa-se, a partir da Equação (3.16), que a função de mapeamento da configuração atual é função não-linear dos parâmetros nodais. Portanto, a utilização direta da Equação (2.20) gera uma matriz de massa variável no tempo, o que não é desejável para os métodos de integração temporal comumente empregados em análises lineares. Para contornar esse problema, despreza-se a contribuição da taxa de variação da deformação na espessura  $a^m$ . Assim, a função de mapeamento da configuração atual é reescrita, apenas para a determinação da matriz de massa, como:

$$\boldsymbol{\zeta}^1(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) = \phi^k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{y}^k + \frac{h_0}{2} \xi_3 \phi^k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{v}^k \quad (3.17)$$

Por clareza, escreve-se aqui a força de inércia  $(\mathbf{f}_\ell^{iner})^k$ , de um elemento  $\ell$  e nó  $k$ . Realizando-se as derivações necessárias, obtém-se:

$$(\mathbf{f}_\ell^{iner})^k = \int_{\Omega_\ell^e} \rho_0 \begin{bmatrix} \phi^k \phi^m & \frac{h_0}{2} \xi_3 \phi^k \phi^m \\ \frac{h_0}{2} \xi_3 \phi^k \phi^m & \frac{h_0^2}{4} \xi_3^2 \phi^k \phi^m \end{bmatrix} d\Omega_0 \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}^m \\ \ddot{\mathbf{v}}^m \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

em que a integral presente na expressão corresponde à matriz de massa do elemento  $\ell$ .

### 3.3.1 Acoplamento entre vetores generalizados não-coincidentes

A depender da geometria da estrutura analisada, sua discretização, quando realizada com elementos finitos de casca, pode apresentar elementos finitos vizinhos tais que os vetores normais nos nós em comum não são coincidentes. Assim, é necessária a definição de estratégia de acoplamento para garantir a continuidade de giro entre esses elementos. O trabalho de Siqueira (2019) apresenta diversos tipos de acoplamento, incluindo juntas rotacionais cilíndricas e esféricas, por exemplo.

No presente trabalho, é de interesse apenas manter a continuidade de giro entre os elementos. Nesse sentido, é empregada uma estratégia que insere rigidez nessas regiões, conforme realizado por Soares, Paccola e Coda (2019) e Soares (2019). Essa estratégia se baseia na inserção de um elemento de penalização que conecta as extremidades dos vetores normais não coincidentes de um nó. A rigidez adotada para este elemento é baseada em equivalência com a energia de deformação de um sólido auxiliar que preenche o espaço de conexão. Ressalta-se que essa estratégia é empregada apenas quando o ângulo entre os vetores normais envolvidos é maior que um determinado valor limite, aqui adotado como  $15^\circ$ . Para ângulos menores, utiliza-se as componentes do vetor bissetriz como parâmetros nodais do referido nó.

Adotou-se como elemento de penalização o elemento finito de treliça, descrito na seção 3.1. Dessa forma, ao invés de se conectar dois nós da discretização, conecta-se dois vetores generalizados. Assim, para a definição completa da conexão, resta a obtenção de uma rigidez equivalente  $EA_0$  que represente adequadamente o comportamento dessa região.

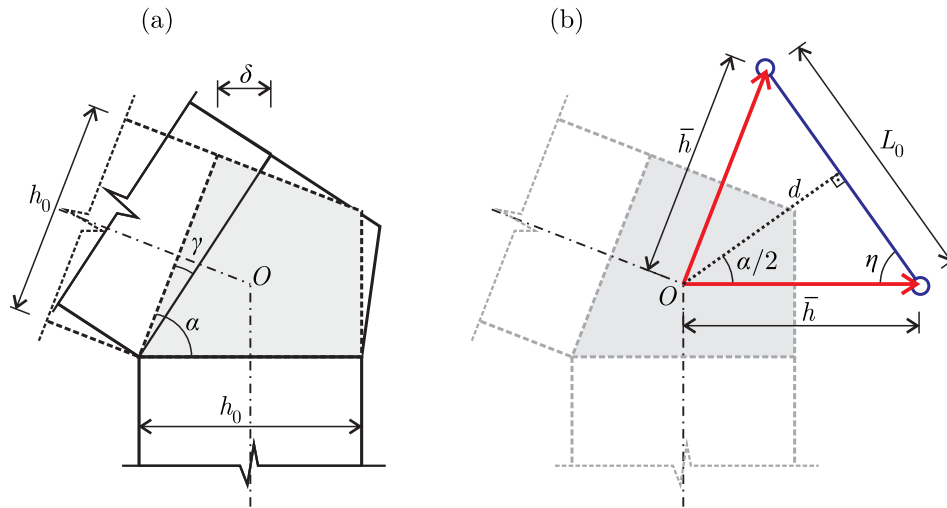
A rigidez para os elementos de penalização são obtidas por meio de equivalência aproximada entre as energias de deformação dos modelos mecânicos apresentados na Figura 6. Conforme já demonstrado em Soares (2019), as energias de deformação  $\mathcal{U}^{sol}$  do sólido, Figura 6(a), e  $\mathcal{U}^{bar}$  da barra de treliça, Figura 6(b), são expressas, respectivamente, por:

$$\mathcal{U}^{sol} = \frac{1}{2}G\gamma^2h_0^2b \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (3.19)$$

$$\mathcal{U}^{bar} = \frac{1}{4}EA_0\gamma^2\bar{h} \operatorname{tg}^2\eta \cos\eta \quad (3.20)$$

em que  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do sólido,  $b$  é a espessura do sólido (geralmente igual à distância entre dois nós vizinhos ao longo da conexão) e  $\eta = (\pi - \alpha)/2$ .

Figura 6 – Equivalência entre as energias de deformação de: (a) sólido que preenche o espaço de ligação e (b) elemento de barra simples (conectando os vetores generalizados)



Fonte: Autor.

Igualando-se as Equações (3.19) e (3.20), obtém-se a seguinte expressão para a rigidez equivalente:

$$EA_0 = 2Gh_0b \left[ \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sec\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \frac{h_0}{\bar{h}} \quad (3.21)$$

A adoção de uma rigidez coerente com a ligação real evita os problemas de mal-condicionamento do sistema já conhecidos da estratégia de penalização. Além disso, permite a obtenção de soluções mais adequadas ao esquema de ligação real.

### 3.3.2 Força não-conservativa - pressão seguidora

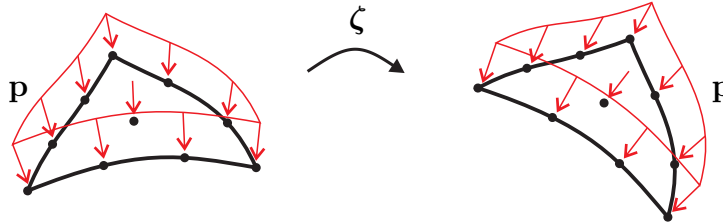
Outro tópico de interesse é o estudo da influência da pressão seguidora no comportamento de instabilidade da estrutura. As equações de equilíbrio e o método de solução apresentados no [Capítulo 2](#) consideram a presença de forças não-conservativas. No entanto, como a determinação de expressões explícitas envolve o conhecimento da cinemática do elemento finito no qual a força é aplicada, optou-se por realizá-la neste capítulo.

Para a aplicação da pressão seguidora, consideram-se como hipóteses que a pressão atua sempre na direção normal à superfície na configuração atual e que seu valor seja constante ao longo do elemento, conforme [Figura 7](#). Devido à natureza não-conservativa da força, sua energia potencial não pode ser escrita. No entanto, sua variação pode ser escrita como:

$$\delta\mathcal{P} = - \int_S \mathbf{p}(\mathbf{y}) \cdot \delta\mathbf{y} dS = - \int_S p \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \delta\mathbf{y} dS \quad (3.22)$$

em que  $\mathbf{p}(\mathbf{y})$  é a pressão seguidora de valor constante igual a  $p$  atuando na direção do vetor normal  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  e  $S$  é a área da superfície na configuração atual sobre a qual a pressão é aplicada.

Figura 7 – Pressão seguidora atuando sobre um elemento finito de superfície



Fonte: Autor.

A posição  $\mathbf{y}$  de um ponto no interior de um elemento finito de superfície pode ser obtida a partir da interpolação dos valores nodais, isto é,  $\mathbf{y} = \phi^\beta \mathbf{y}^\beta$ . Dessa forma, o vetor de parâmetros nodais  $\mathbf{Y}$  agrupa as posições  $\mathbf{y}^\beta$  de cada nó  $\beta$  do elemento sobre o qual a pressão é aplicada. Sendo  $\delta\mathbf{y} = \phi^\beta \delta\mathbf{y}^\beta$  e escrevendo a Equação (3.22) para um elemento finito  $\ell$ , obtém-se:

$$\delta\mathcal{P} = - \int_{S^\ell} p \phi^\beta \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \delta\mathbf{y}^\beta dS \quad (3.23)$$

sendo  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  o vetor normal à superfície. Considerando a arbitrariedade de  $\delta\mathbf{y}^\beta$  a expressão a ser adicionada à força externa  $\mathbf{f}^{ext}$  é fornecida para um nó  $\beta$  de um elemento finito  $\ell$  como:

$$(\mathbf{f}_\ell^{ext})^\beta = \int_{S^\ell} p \phi^\beta \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS \quad (3.24)$$

A integral presente na Equação (3.24) pode ser realizada a partir do espaço paramétrico  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ . Essa parametrização permite a determinação do vetor normal como:

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{t}^1 \times \mathbf{t}^2}{\|\mathbf{t}^1 \times \mathbf{t}^2\|} \quad (3.25)$$

sendo  $\mathbf{t}^1 = (\partial\phi^k/\partial\xi_1)\mathbf{y}^k$  e  $\mathbf{t}^2 = (\partial\phi^k/\partial\xi_2)\mathbf{y}^k$  dois vetores tangentes à superfície e  $\times$  denota produto vetorial. Denotando por  $d\Lambda$  o infinitésimo de área no espaço paramétrico, sabe-se que  $dS = J_1 d\Lambda$ , sendo  $J_1 = \|\mathbf{t}^1 \times \mathbf{t}^2\|$  o jacobiano do mapeamento da superfície na configuração atual. A força externa fica então expressa como:

$$(\mathbf{f}_\ell^{ext})^\beta = \int_{\Lambda^\ell} p \phi^\beta (\mathbf{t}^1 \times \mathbf{t}^2) d\Lambda \quad (3.26)$$

ou, em notação indicial, para nó  $\beta$  e direção  $\alpha$  de um elemento finito  $\ell$ :

$$(f_\ell^{ext})_\alpha^\beta = \int_{\Lambda^\ell} p \phi^\beta (\varepsilon_{\alpha pq} t_p^1 t_q^2) d\Lambda = \int_{\Lambda^\ell} p \phi^\beta \left[ \varepsilon_{\alpha pq} \left( \frac{\partial\phi^m}{\partial\xi_1} y_p^m \right) \left( \frac{\partial\phi^n}{\partial\xi_2} y_q^n \right) \right] d\Lambda \quad (3.27)$$

em que  $\varepsilon_{\alpha pq}$  é o tensor de permutação de Levi-Civita.

A contribuição a ser adicionada à matriz Hessiana é fornecida a partir da derivada da Equação (3.26) com relação às posições  $\mathbf{y}^z$  do nó  $z$  de um elemento finito  $\ell$ , que resulta em:

$$\frac{\partial(\mathbf{f}_\ell^{ext})^\beta}{\partial\mathbf{y}^z} = \int_{\Lambda^\ell} p \phi^\beta \left( \frac{\partial\mathbf{t}^1}{\partial\mathbf{y}^z} \times \mathbf{t}^2 + \mathbf{t}^1 \times \frac{\partial\mathbf{t}^2}{\partial\mathbf{y}^z} \right) d\Lambda \quad (3.28)$$

Após manipulações algébricas sobre a Equação (3.28), a mesma pode ser escrita em notação indicial como:

$$\frac{\partial(f_\ell^{ext})_\alpha^\beta}{\partial y_\gamma^z} = p \varepsilon_{\alpha\gamma p} y_p^m \int_{\Lambda^\ell} \phi^\beta \left( \frac{\partial\phi^z}{\partial\xi_1} \frac{\partial\phi^m}{\partial\xi_2} - \frac{\partial\phi^m}{\partial\xi_1} \frac{\partial\phi^z}{\partial\xi_2} \right) d\Lambda \quad (3.29)$$

Assim, a contribuição do elemento  $\ell$  à matriz hessiana é fornecida como:

$$H_{ij}^\ell = -\lambda \frac{\partial(f_\ell^{ext})_\alpha^\beta}{\partial y_\gamma^z} = -\lambda p \varepsilon_{\alpha\gamma p} y_p^m \int_{\Lambda^\ell} \phi^\beta \left( \frac{\partial\phi^z}{\partial\xi_1} \frac{\partial\phi^m}{\partial\xi_2} - \frac{\partial\phi^m}{\partial\xi_1} \frac{\partial\phi^z}{\partial\xi_2} \right) d\Lambda \quad (3.30)$$

em que nó  $\beta$  e direção  $\alpha$  compõem o grau de liberdade  $i$  e nó  $z$  e direção  $\gamma$  compõem o grau de liberdade  $j$ .

A Equação (3.30) resulta numa contribuição não-simétrica à matriz hessiana  $\mathbf{H}$ . No caso particular de pressão seguidora, os trabalhos de [Schwizerhof e Ramm \(1984\)](#) e

Iwata, Tsukimori e Kubo (1991) mostraram que a parcela não-simétrica da contribuição à matriz hessiana possui efeito negligenciável no processo de solução do problema mecânico. No âmbito da análise de estabilidade, apenas a parte simétrica é de fato necessária para a determinação da carga crítica de instabilidade, conforme já discutido na seção 2.7.

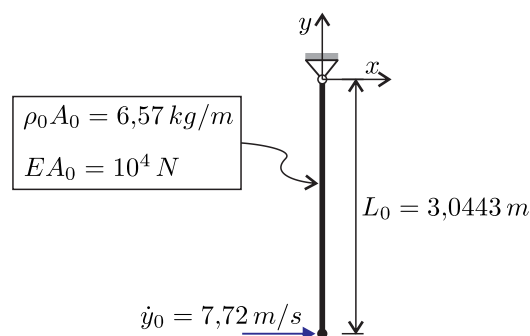
### 3.4 Exemplos numéricos

Nesta seção três exemplos numéricos de validação são apresentados. A formulação base do problema estático e a formulação para análises de estabilidade foram implementados em um código computacional, o qual foi validado em Soares (2019). O presente trabalho utilizou-se do referido código base, a partir do qual foram realizadas novas implementações. Nesse sentido, os exemplos aqui apresentados se limitarão à validação do problema dinâmico com o integrador temporal  $\alpha$ -generalizado.

#### 3.4.1 Pêndulo elástico

Neste primeiro exemplo pretende-se validar a implementação do integrador temporal  $\alpha$ -generalizado com elemento finito de treliça. Nesse sentido, reproduz-se aqui o exemplo definido em Kuhl e Crisfield (1999). As principais informações estão apresentadas na Figura 8. Para o integrador temporal, foi empregado um passo de tempo  $\Delta t = 0,05 s$  e foi observado o comportamento da estrutura para diferentes valores do raio espectral  $\rho_\infty$ .

Figura 8 – Pêndulo elástico: condições iniciais e de contorno e propriedades

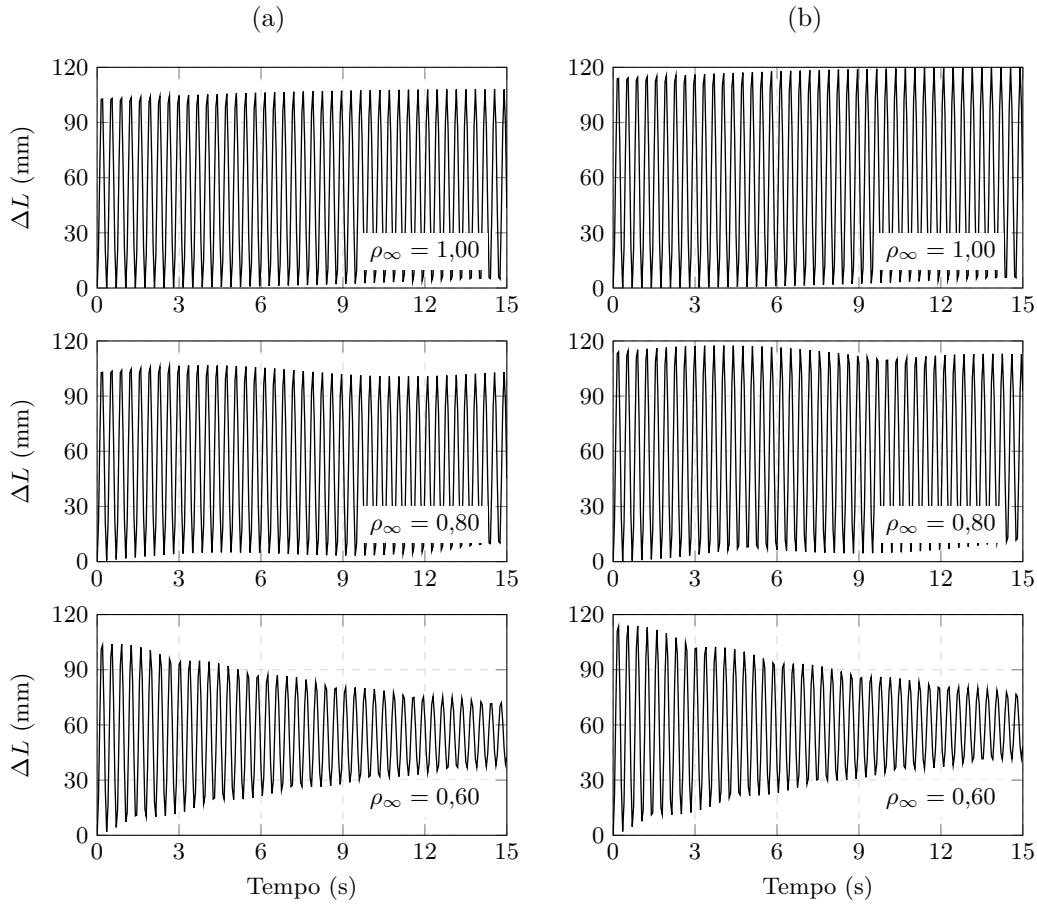


Fonte: Autor.

De modo a tornar o problema equivalente ao definido por Kuhl e Crisfield (1999), utiliza-se aqui a matriz de massa diagonal, em que metade da massa do elemento finito é considerada concentrada em cada um dos nós de extremidade. Nessas condições, determina-se inicialmente a variação do comprimento da barra  $\Delta L$  em função do tempo para três valores de  $\rho_\infty$ , conforme Figura 9. Na referida figura, apresenta-se também os resultados obtidos por Kuhl e Crisfield (1999) para fins de comparação.



Figura 9 – Variação de comprimento  $\Delta L$  (mm) em função do tempo (s) para diferentes raios espectrais  $\rho_\infty$ : (a) solução de referência obtida por Kuhl e Crisfield (1999) e (b) solução obtida no presente trabalho.



Fonte: Autor.

Na Figura 9, observa-se que os resultados obtidos no presente trabalho são semelhantes à solução tomada como referência. Na figura, fica evidente também a diminuição da amplitude de  $\Delta L$  com o tempo conforme se diminui o valor do raio espectral  $\rho_\infty$ , indicando a introdução de dissipação numérica, como esperado.

Para observar de forma mais precisa a dissipação numérica, apresentam-se também os resultados em termos de energia total (energia cinética + energia de deformação), Figura 10, sendo o valor da energia determinado para cada passo intermediário  $s + 1 - \alpha_f$  do método  $\alpha$ -generalizado. A energia de deformação é obtida conforme a Equação (3.5) e a energia cinética é obtida de forma geral como:

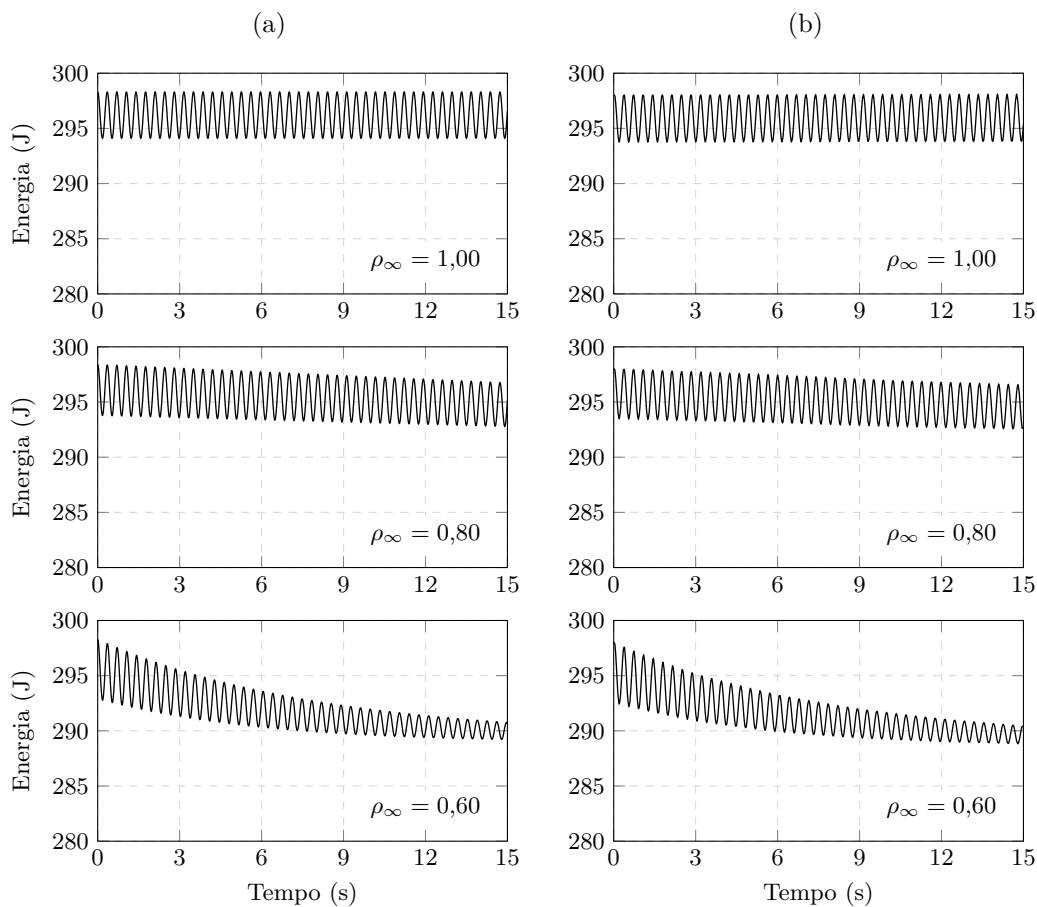
$$\mathcal{K} = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} dV_0 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Y}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{Y}} \quad (3.31)$$

sendo  $\mathbf{M}$  a matriz de massa e  $\dot{\mathbf{Y}}$  o vetor de velocidades nodais.

Na Figura 10 observa-se novamente que os resultados obtidos no presente trabalho são idênticos à solução de referência, validando assim a implementação do método  $\alpha$ -

generalizado. Destaca-se ainda que, mesmo para o caso teoricamente sem dissipação ( $\rho_\infty = 1,0$ ), a energia total apresenta um perfil oscilatório. Mesmo que a amplitude de oscilação seja pequena, esse fato evidencia a limitação do método em representar precisamente a energia do sistema. Fica exposto, portanto, a necessidade de reduzir o valor do incremento de tempo  $\Delta t$  para a realização de análises numéricas mais precisas.

Figura 10 – Energia total ( $J$ ) em função do tempo ( $s$ ) para diferentes raios espectrais  $\rho_\infty$ : (a) solução de referência obtida por Kuhl e Crisfield (1999) e (b) solução obtida no presente trabalho.



Fonte: Autor.

Mesmo com as limitações observadas, Siqueira (2019) mostrou que o método  $\alpha$ -generalizado possui desempenho melhor que o método de Newmark- $\beta$ . Para um mesmo valor de  $\Delta t$ , o método  $\alpha$ -generalizado apresentou maior intervalo de estabilidade.

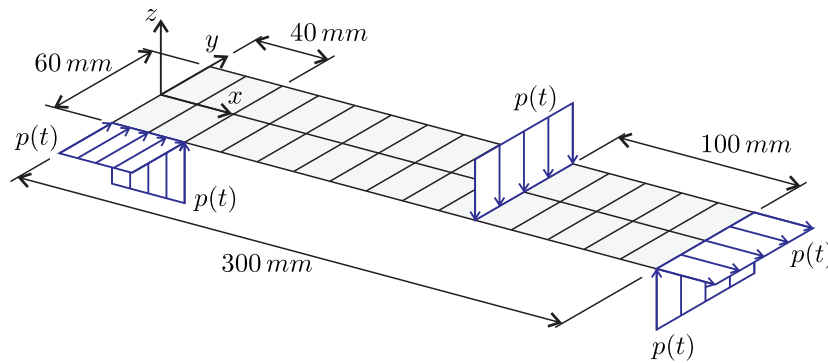
Cabe mencionar que existem outros métodos de integração temporal presentes na literatura. No entanto, alguns deles exigem modificações mais profundas no equacionamento dos elementos finitos, dificultando a generalização. Todavia, o próprio equacionamento do método  $\alpha$ -generalizado permite a reprodução de diversos outros integradores temporais apenas alterando os valores das constantes presentes no método. No presente trabalho, utilizam-se apenas os parâmetros definidos originalmente por Chung e Hulbert (1993) para

o método  $\alpha$ -generalizado e representados por meio de um único parâmetro denominado raio espectral  $\rho_\infty$ .

### 3.4.2 Régua flexível

Este segundo exemplo é apresentado para validação dos elementos finitos de casca e de sólido tridimensional com integrador temporal  $\alpha$ -generalizado. A estrutura a ser analisada é a apresentada na [Figura 11](#) e foi estudada por [Kuhl e Ramm \(1999\)](#). O material empregado possui as seguintes propriedades:  $E = 206,0 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,0$  e  $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . A espessura da régua é  $h_0 = 2 \text{ mm}$ .

Figura 11 – Geometria, carregamento e discretização da régua flexível.



Fonte: Autor.

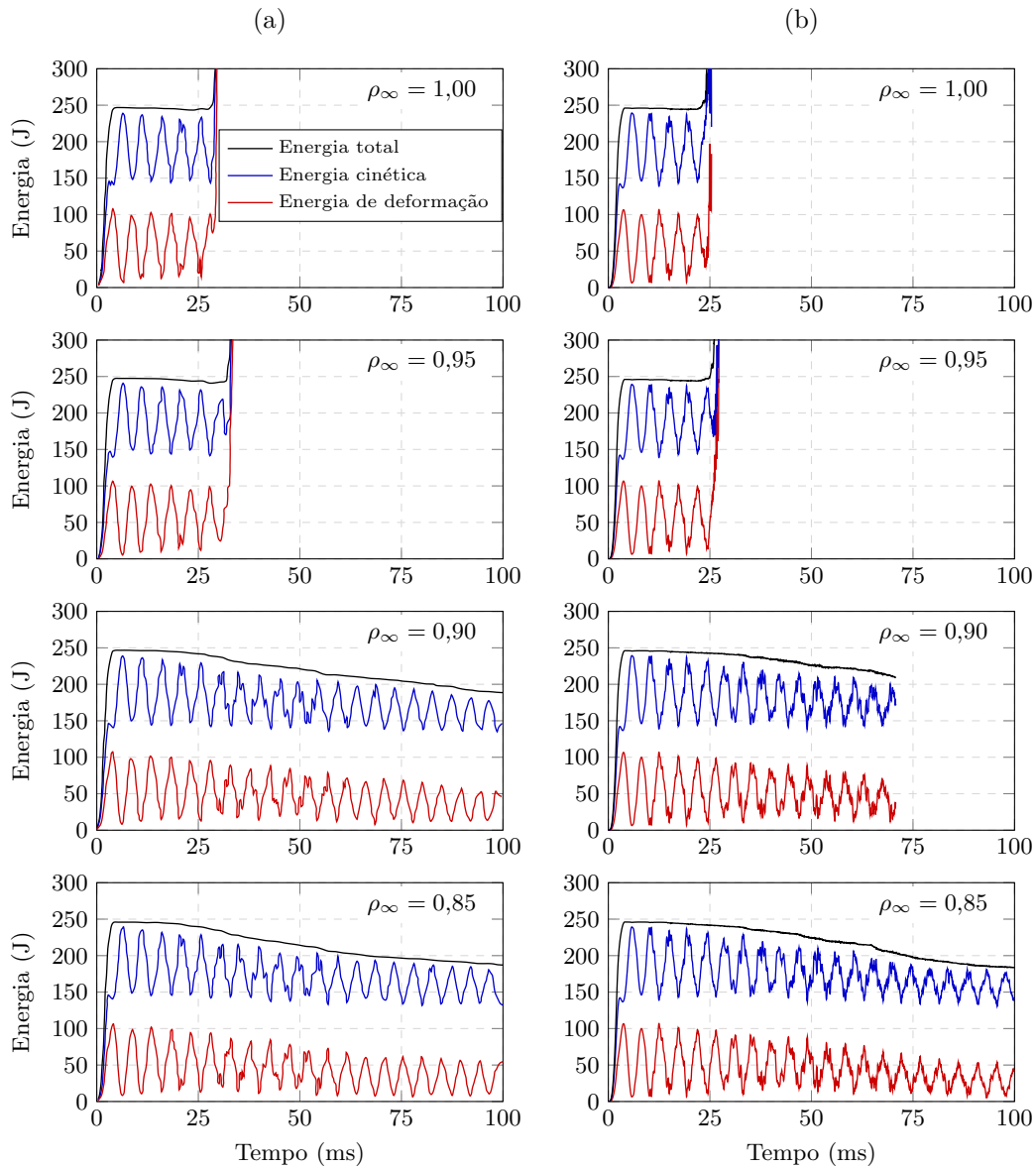
A intensidade do carregamento  $p(t)$  (em  $kN/m$ ) para  $t$  em milissegundos ( $ms$ ) é tal que:

$$p(t) = \begin{cases} 20t & \text{para } 0 \text{ ms} \leq t \leq 2 \text{ ms} \\ 20(4 - t) & \text{para } 2 \text{ ms} < t \leq 4 \text{ ms} \\ 0 & \text{para } t > 4 \text{ ms} \end{cases} \quad (3.32)$$

Para as análises numéricas foi utilizado um passo de tempo  $\Delta t = 50 \mu s$ . Adotou-se uma discretização semelhante à de [Kuhl e Ramm \(1999\)](#), resultando em 30 elementos finitos quadrilaterais com aproximação quadrática e 1085 graus de liberdade. Quatro valores de raio espectral  $\rho_\infty$  foram analisados e os resultados obtidos em termos de energia estão apresentados na [Figura 12](#), onde também estão apresentados os resultados de referência.

A partir dos gráficos apresentados na [Figura 12](#), nota-se boa adequação aos resultados de referência. Cabe mencionar que o elemento finito utilizado por [Kuhl e Ramm \(1999\)](#) possui simplificações em sua cinemática e os autores utilizaram a técnica de integração reduzida para solucionar o problema do travamento volumétrico. Portanto, as diferenças observadas nas soluções se devem basicamente a esses fatores mencionados.

Figura 12 – Energia ( $J$ ) em função do tempo ( $ms$ ) para diferentes raios espectrais  $\rho_\infty$ : (a) solução de referência obtida por Kuhl e Ramm (1999) e (b) solução obtida no presente trabalho.

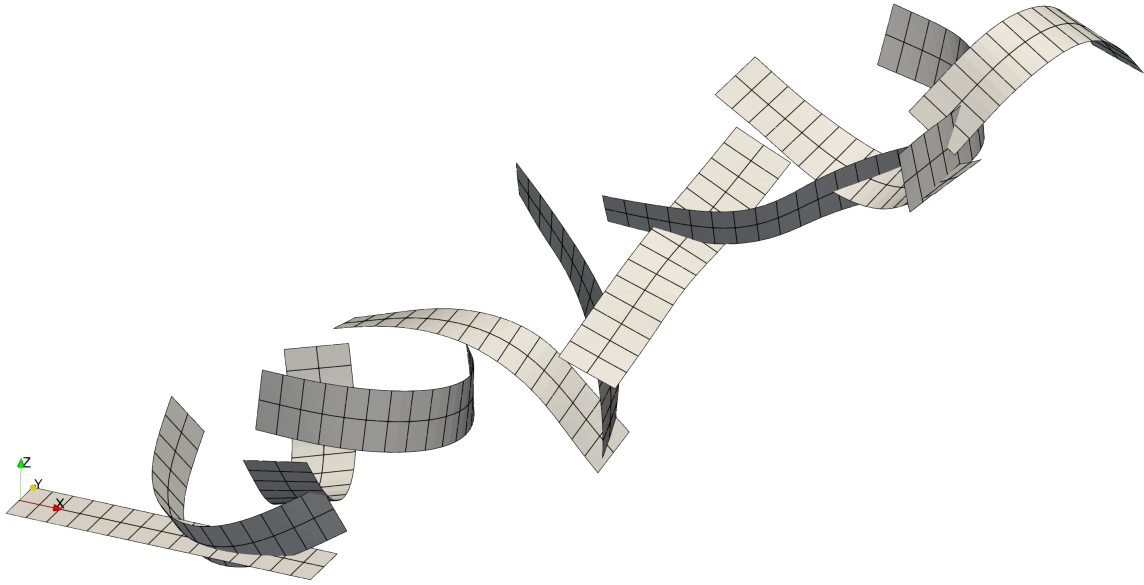


Fonte: Autor.

A diferença maior nas respostas ocorre para  $\rho_\infty = 0,90$ , onde o processo de solução divergiu antes do fim da análise. Essa dificuldade adicional para convergência pode ser explicada justamente pela diferença entre as cinemáticas. A diferença entre as matrizes de rigidez ocasiona uma diferença sutil na frequência de oscilação das parcelas de energia. A partir do número de oscilações observado nos gráficos, nota-se que a frequência de oscilação das parcelas de energia obtidas no presente trabalho é levemente maior, o que pode explicar essa dificuldade adicional para convergência.

Para fins de ilustrar a movimentação da régua, apresenta-se na [Figura 13](#) a configuração da régua a cada  $4ms$  para um valor de raio espectral  $\rho_\infty = 0,85$ .

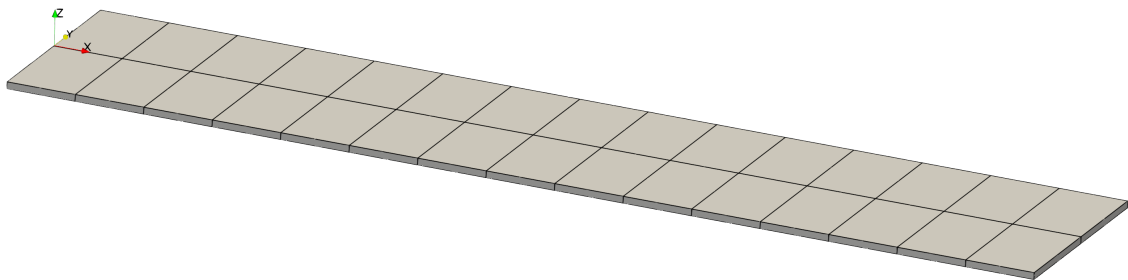
Figura 13 – Movimentação da régua flexível para  $\rho_\infty = 0,85$  plotadas a cada 4 *ms*.



Fonte: Autor.

Aproveita-se também este exemplo para validação do elemento finito de sólido tridimensional. Para isso, emprega-se uma discretização equivalente à adotada para elemento de casca, resultando numa malha de 30 elementos finitos hexaédricos com aproximação quadrática, conforme [Figura 14](#), e 1395 graus de liberdade.

Figura 14 – Discretização da régua flexível em elementos finitos de sólido hexaédrico com aproximação quadrática

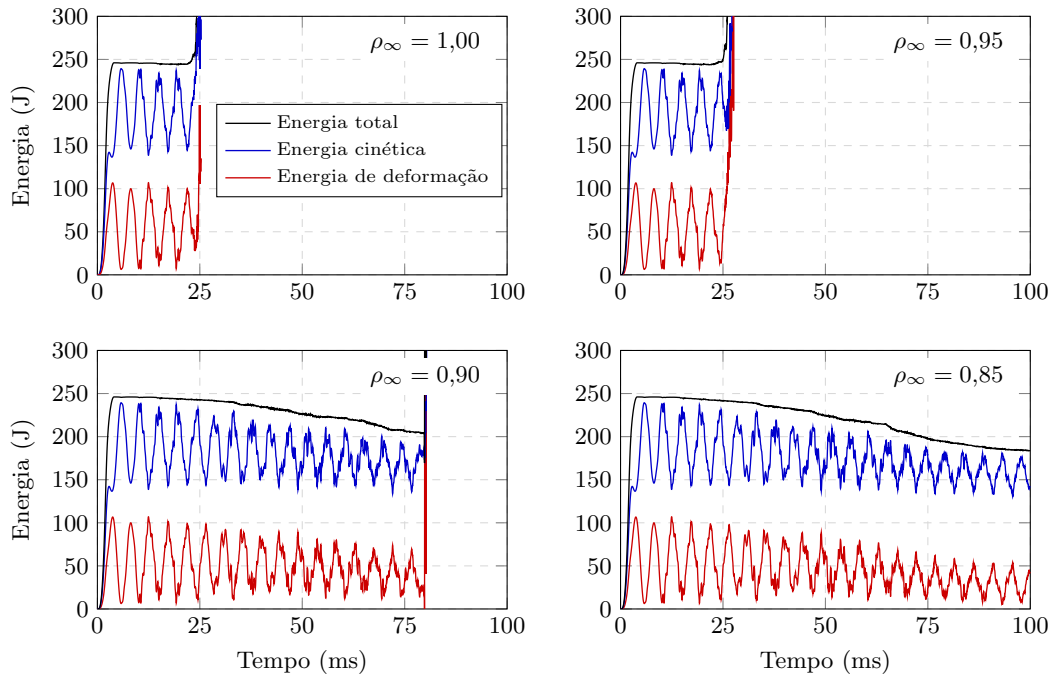


Fonte: Autor.

Os resultados para a discretização em elementos finitos de sólido tridimensional estão apresentados na [Figura 15](#). Observa-se que os resultados foram praticamente coincidentes com os obtidos para elemento finito de casca, exceto para o caso  $\rho_\infty = 0,90$ . Nesse caso, a análise baseada na discretização em elementos de sólido permaneceu estável durante um período de tempo maior, mas ainda sofreu instabilidade numérica antes do tempo final de 100 *ms*.

Assim, conclui-se as validações dos diferentes elementos finitos aqui empregados e do integrador temporal  $\alpha$ -generalizado. Com relação à pressão seguidora, sua validação será realizada no próximo capítulo, juntamente com a estratégia do comprimento de arco.

Figura 15 – Energia ( $J$ ) em função do tempo ( $ms$ ) para diferentes raios espectrais  $\rho_\infty$  utilizando elemento finito de sólido tridimensional



Fonte: Autor.

## CAPÍTULO 4

# SOLUÇÃO VIA ESTRATÉGIA DO COMPRIMENTO DE ARCO

Tradicionalmente, o sistema de equações não-lineares proveniente da aplicação do Método dos Elementos Finitos é resolvido pelo método de Newton-Raphson. Este método consiste de um procedimento incremental-iterativo, em que o processo incremental é realizado por meio de controle de força ou deslocamento e o processo iterativo é realizado com base na matriz de rigidez tangente. Entretanto, esse método não é efetivo quando a solução procurada está situada entre pontos de *snap-through* ou *snap-back* da trajetória de equilíbrio, a depender do tipo de controle do processo incremental.

De modo a resolver adequadamente problemas cuja resposta apresenta *snap-through* ou *snap-back*, foi desenvolvida a estratégia do comprimento de arco (WEMPNER, 1971; RIKS, 1972; CRISFIELD, 1981). Essa estratégia consiste basicamente de uma modificação do método de Newton-Raphson por meio da inclusão de uma equação de restrição adicional para delimitar a região de busca da solução. Em outras palavras, o procedimento deixa de ser realizado puramente com controle de força ou deslocamento e passa a ser realizado com controle de ambos simultaneamente. Para isso, é efetuada a imposição de uma equação de restrição definida no espaço força-deslocamento.

A equação que define o resíduo para o método de Newton-Raphson considerando problemas estáticos é fornecida pela Equação (2.39). Numa análise incremental com controle de força, o parâmetro  $\lambda$  é constante em cada passo. Para o método do comprimento de arco, esse parâmetro se torna função da curva de restrição, sendo, portanto, variável dentro do processo iterativo. Sendo  $\lambda$  uma variável do problema, o resíduo passa a ser escrito como:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\Upsilon}, \lambda) = \mathbf{f}^{int}(\boldsymbol{\Upsilon}) - \lambda \mathbf{f}^{ext}(\boldsymbol{\Upsilon}) \quad (4.1)$$

Ao se acrescentar uma incógnita, uma equação adicional deve ser inserida de modo a se obter um sistema determinado. A equação de restrição a ser imposta corresponde a um arco de circunferência e sua expressão é fornecida como:

$$\Delta s^2 = \Delta \Upsilon \cdot \Delta \Upsilon + \psi^2 \Delta \lambda^2 \quad (4.2)$$

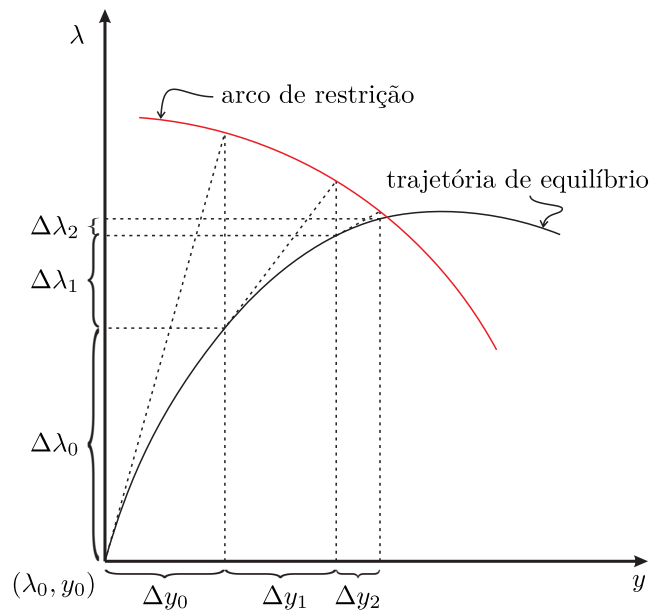
na qual  $\psi$  é um fator de ajuste dimensional para compatibilizar as grandezas presentes na equação.

Uma sugestão para o valor de  $\psi$  é escrevê-lo como a razão entre o incremento de posição e o incremento de força para a primeira iteração. Desse modo, define-se:

$$\psi = \frac{\|\Delta \Upsilon_0\|}{|\Delta \lambda_0|} \quad (4.3)$$

O procedimento iterativo da estratégia do comprimento de arco pode ser exemplificado conforme a [Figura 16](#). Desde que o arco possua raio suficientemente pequeno e que o fator  $\psi$  seja definido adequadamente, a ocorrência dos fenômenos de *snap-through* e *snap-back* pode ser evitada.

Figura 16 – Procedimento iterativo da estratégia do comprimento de arco



Fonte: Autor.

O procedimento iterativo consiste de duas etapas: estágio de previsão e estágio de correção. O estágio de previsão é realizado na primeira iteração de cada passo incremental e determina o arco a ser utilizado no processo iterativo. O estágio de correção parte do arco determinado no estágio de previsão e realiza a busca de uma solução por meio do método de Newton-Raphson.

#### 4.1 Estágio de previsão

Seja  $\Upsilon_{k-1}$  e  $\lambda_{k-1}$  um par correspondente a uma solução equilibrada no final do passo incremental  $k - 1$ . Para se obter uma primeira solução tentativa para o passo  $k$ ,



incrementa-se essa solução em  $\Delta \Upsilon_k$  e  $\Delta \lambda_k$ , respectivamente. A expansão do resíduo em série de Taylor resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\Upsilon_{k-1} + \Delta \Upsilon_k, \lambda_{k-1} + \Delta \lambda_k) &= \mathbf{g}(\Upsilon_{k-1}, \lambda_{k-1}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \Upsilon}(\Upsilon_{k-1}, \lambda_{k-1}) \cdot \Delta \Upsilon_k + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda}(\Upsilon_{k-1}, \lambda_{k-1}) \Delta \lambda_k + \mathcal{O}(\Delta \Upsilon_{k-1}, \Delta \lambda_{k-1}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.4)$$

na qual  $\mathcal{O}(\Delta \Upsilon_{k-1}, \Delta \lambda_{k-1})$  são os termos de ordem superior em  $\Delta \Upsilon_k$  e  $\Delta \lambda_k$  e as derivadas do resíduo são expressas como:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \Upsilon}(\Upsilon_{k-1}, \lambda_{k-1}) = \mathbf{H}(\Upsilon_{k-1}, \lambda_{k-1}) = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \Upsilon}(\Upsilon_{k-1}) - \lambda_{k-1} \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \Upsilon}(\Upsilon_{k-1}) \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda}(\Upsilon_{k-1}, \lambda_{k-1}) = -\mathbf{f}^{ext}(\Upsilon_{k-1}) \quad (4.5b)$$

Como  $\Upsilon_{k-1}$  e  $\lambda_{k-1}$  determinam um ponto de equilíbrio, tem-se que  $\mathbf{g}(\Upsilon_{k-1}, \lambda_{k-1}) = \mathbf{0}$ . Desprezando-se os termos de ordem superior, o incremento de posição  $\Delta \Upsilon_k$  pode então ser obtido a partir da Equação (4.4) como:

$$\Delta \Upsilon_k = \Delta \lambda_k \mathbf{H}^{-1}(\Upsilon_{k-1}, \lambda_{k-1}) \mathbf{f}^{ext}(\Upsilon_{k-1}) \quad (4.6)$$

Para o passo inicial ( $k = 0$ ) deve ser atribuído um valor de entrada para  $\Delta \lambda_0$ . Dessa forma,  $\Delta \Upsilon_0$  fica fornecido diretamente pela Equação (4.6) quando toma-se para  $\Upsilon_{k-1}$  os parâmetros nodais na configuração inicial e  $\lambda_{k-1} = 0$ . Assim, o valor do raio do arco para o primeiro passo é fornecido como:

$$\Delta s_0 = \sqrt{\Delta \Upsilon_0 \cdot \Delta \Upsilon_0 + \psi^2 \Delta \lambda_0^2} \quad (4.7)$$

Para os demais passos ( $k > 0$ ) pode-se atualizar o valor do raio do arco com base no número de iterações realizadas no passo anterior. Definindo-se  $n_d$  como o número de iterações desejado, o raio pode ser atualizado da seguinte forma:

$$\Delta s_k = \Delta s_{k-1} \left( \frac{n_d}{n_{k-1}} \right)^\gamma \quad (4.8)$$

sendo  $n_{k-1}$  o número de iterações realizadas no passo  $k - 1$  e  $\gamma$  um parâmetro que ajusta a taxa de mudança do raio de um passo para outro.

O incremento  $\Delta \lambda_k$  pode então ser determinado substituindo-se (4.6) em (4.2), que resulta em:

$$\Delta \lambda_k = \pm \frac{\Delta s_k}{\sqrt{\Upsilon_{k-1}^T \cdot \Upsilon_{k-1} + \psi^2}} \quad (4.9)$$

em que

$$\mathbf{\Upsilon}_{k-1}^T = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{\Upsilon}_{k-1}, \lambda_{k-1}) \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon}_{k-1}) \quad (4.10)$$

A escolha do sinal na Equação (4.9) deve ser tal que se obtenha um avanço na trajetória de equilíbrio. Uma forma precisa de se determinar este sinal é com base no histórico de soluções. Nesse sentido, utiliza-se aqui a expressão proposta por Feng, Perić e Owen (1996):

$$\text{sign}(\Delta\lambda_k) = \text{sign}\left(\Delta\mathbf{\Upsilon}_{k-1} \cdot \mathbf{\Upsilon}_{k-1}^T + \Delta\lambda_{k-1}\psi^2\right) \quad (4.11)$$

onde  $\text{sign}(\bullet)$  representa a função sinal.

Após determinado  $\Delta\lambda_k$ , o incremento  $\Delta\mathbf{\Upsilon}_k$  pode ser imediatamente obtido por meio da Equação (4.6). Com esses incrementos obtidos, faz-se  $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \Delta\lambda_k$  e  $\mathbf{\Upsilon}_k = \mathbf{\Upsilon}_{k-1} + \Delta\mathbf{\Upsilon}_k$  e procede-se ao estágio de correção.

## 4.2 Estágio de correção

No estágio de previsão foi determinado o par  $\mathbf{y}_k$  e  $\lambda_k$  correspondente a uma primeira solução tentativa. Para encontrar uma solução equilibrada, minimiza-se então o novo resíduo  $\mathbf{g}(\mathbf{y}_k, \lambda_k)$  por meio da expansão em série de Taylor:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_k + \delta\mathbf{\Upsilon}_k, \lambda_k + \delta\lambda_k) &= \mathbf{g}(\mathbf{\Upsilon}_k, \lambda_k) + \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{\Upsilon}}(\mathbf{\Upsilon}_k, \lambda_k) \cdot \delta\mathbf{\Upsilon}_k + \\ &+ \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\lambda}(\mathbf{\Upsilon}_k, \lambda_k)\delta\lambda_k + \mathcal{O}(\delta\mathbf{\Upsilon}_k, \delta\lambda_k) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.12)$$

sendo as derivadas do resíduo expressas como:

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{\Upsilon}}(\mathbf{\Upsilon}_k, \lambda_k) = \mathbf{H}(\mathbf{\Upsilon}_k, \lambda_k) = \frac{\partial\mathbf{f}^{int}}{\partial\mathbf{\Upsilon}}(\mathbf{\Upsilon}_k) - \lambda_k \frac{\partial\mathbf{f}^{ext}}{\partial\mathbf{\Upsilon}}(\mathbf{\Upsilon}_k, \lambda_k) \quad (4.13a)$$

$$\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\lambda}(\mathbf{\Upsilon}_k, \lambda_k) = -\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon}_k) \quad (4.13b)$$

O raio do arco determinado no estágio de previsão é mantido constante em todo o estágio e correção. Portanto, os novos incrementos devem produzir o mesmo  $\Delta s_k$ :

$$\begin{aligned} \Delta s_k^2 &= \Delta\mathbf{\Upsilon}_k \cdot \Delta\mathbf{\Upsilon}_k + \psi^2 \Delta\lambda_k^2 = \\ &= (\Delta\mathbf{\Upsilon}_k + \delta\mathbf{\Upsilon}_k) \cdot (\Delta\mathbf{\Upsilon}_k + \delta\mathbf{\Upsilon}_k) + \psi^2 (\Delta\lambda_k + \delta\lambda_k)^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Realizando manipulações algébricas sobre a Equação (4.14), obtém-se a seguinte equação:

$$2(\Delta \Upsilon_k \cdot \delta \Upsilon_k + \psi^2 \Delta \lambda_k \delta \lambda_k) + \delta \Upsilon_k \cdot \delta \Upsilon_k + \psi^2 \delta \lambda_k^2 = 0 \quad (4.15)$$

A Equação (4.15) pode ser resolvida na sua forma completa ou linearizada. Nesta pesquisa, é adotada a versão linearizada, a qual é obtida eliminando-se as parcelas quadráticas em  $\delta \Upsilon_k$  e  $\delta \lambda_k$ . Dessa forma, obtém-se:

$$\Delta \Upsilon_k \cdot \delta \Upsilon_k + \psi^2 \Delta \lambda_k \delta \lambda_k = 0 \quad (4.16)$$

Desprezando os termos de ordem superior da Equação (4.12), isola-se  $\delta \Upsilon$ . Aproveitando também as Equações (4.13a) e (4.13b), obtém-se:

$$\delta \Upsilon_k = \mathbf{H}^{-1}(\Upsilon_k, \lambda_k) [\delta \lambda_k \mathbf{f}^{ext}(\Upsilon_k) - \mathbf{g}(\Upsilon_k, \lambda_k)] \quad (4.17)$$

Substituindo (4.17) em (4.16) e isolando  $\delta \lambda$ , obtém-se:

$$\delta \lambda_k = \frac{\Delta \Upsilon_k \cdot [\mathbf{H}^{-1}(\Upsilon_k, \lambda_k) \mathbf{g}(\Upsilon_k, \lambda_k)]}{\Delta \Upsilon_k \cdot [\mathbf{H}^{-1}(\Upsilon_k, \lambda_k) \mathbf{f}^{ext}] + \psi^2 \Delta \lambda_k} \quad (4.18)$$

Após a obtenção de  $\delta \lambda_k$ , o incremento  $\delta \Upsilon_k$  é obtido por meio da Equação (4.17). Atualiza-se então os parâmetros nodais  $\Upsilon_k = \Upsilon_k + \delta \Upsilon_k$  e o fator de carga  $\lambda_k = \lambda_k + \delta \lambda_k$ , bem como os incrementos  $\Delta \Upsilon_k$  e  $\Delta \lambda_k$ . Enquanto as correções  $\delta \Upsilon_k$  e  $\delta \lambda_k$  não forem suficientemente pequenas, todo o procedimento do estágio de correção é executado novamente. O critério de parada adotado neste trabalho é baseado na norma do vetor de parâmetros nodais:  $\|\delta \Upsilon_k\| / \|\Upsilon_0\| < tol$ , sendo usualmente  $tol = 10^{-8}$ .

### 4.3 Determinação de trajetórias de equilíbrio bifurcadas

Utilizando-se qualquer processo de solução que busca a trajetória de equilíbrio podem-se encontrar pontos de bifurcação da solução. Nesses pontos, a matriz Hessiana, que controla em grande parte a busca das soluções, torna-se singular. Assim, para a obtenção de trajetórias para além de um ponto de bifurcação, adota-se aqui uma estratégia que se baseia na imposição de uma perturbação nas proximidades de pontos críticos. Essa perturbação é imposta na forma de força externa denominada força de perturbação  $\mathbf{f}^{per}$ . Observa-se que esta técnica já foi aplicada em Soares, Paccola e Coda (2019) com o método de Newton-Raphson, porém com a limitação de não se capturar o comportamento pós-crítico em situações de *softening* estrutural.

Para preservar ao máximo a taxa de convergência do processo de solução, essa força é inserida de forma gradual. Assim, o resíduo para um passo  $k$  é expresso como:

$$\mathbf{g}(\Upsilon_k, \lambda_k) = \mathbf{f}^{int}(\Upsilon_k) - \lambda_k \mathbf{f}^{ext}(\Upsilon_k) - (\lambda_k - \lambda_p) \mathbf{f}^{per} \quad (4.19)$$

onde  $\lambda_p$  é o valor de  $\lambda$  no passo  $p$  em que foi determinada a força de perturbação.

A imposição da força perturbação é realizada a partir do passo seguinte ao passo  $p$ . Portanto, a Equação (4.19) é aplicada quando se tem  $p < k \leq p + n_{per}$ , sendo  $n_{per}$  o número de passos em que  $\mathbf{f}^{per}$  é aplicado. Para  $k > p + n_{per}$  retoma-se o resíduo fornecido pela Equação (4.1), ou seja, retira-se a perturbação. O valor de  $n_{per}$  deve ser estabelecido pelo usuário de forma que após a retirada de  $\mathbf{f}^{per}$  a análise prossiga seguindo a trajetória bifurcada correspondente.

A derivada do resíduo apresentado na Equação (4.19) com relação à  $\mathbf{\Upsilon}$  se mantém inalterada, visto que  $\mathbf{f}^{per}$  não depende de  $\mathbf{\Upsilon}$ . No entanto, a derivada com relação a  $\lambda$  se torna:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda}(\mathbf{\Upsilon}, \lambda) = -(\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon}) + \mathbf{f}^{per}) \quad (4.20)$$

Em suma, para o passo  $k$  tal que  $p < k \leq p + n_{per}$  a estratégia do comprimento de arco é aplicada considerando o resíduo fornecido pela Equação (4.1). As demais equações apresentadas nas seções anteriores deste capítulo podem ser utilizadas nessa situação substituindo-se  $\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon})$  por  $\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{\Upsilon}) + \mathbf{f}^{per}$ .

As forças de perturbação aqui empregadas são baseadas em forças generalizadas, conjugadas aos modos de instabilidade determinados no caminho de equilíbrio, próximos aos pontos críticos. Para cada passo  $k$  do processo incremental, uma análise de autovalor é realizada. Num determinado passo  $p$  próximo ao ponto de bifurcação, a força de perturbação é obtida e é aplicada por meio da Equação (4.19). Espera-se que a imposição da perturbação induza o método de solução a seguir um dos ramos da trajetória de equilíbrio bifurcada, não sendo mais necessária a resolução do problema de autovalor.

Um critério para se definir o instante de aplicação de  $\mathbf{f}^{per}$  é fornecido com base no menor dos autovalores  $\mu^{(k)}$ . Organizando esses autovalores em ordem crescente, toma-se o menor autovalor  $\mu^{(0)}$  como base. Quando em uma análise incremental o fator  $\lambda$  se aproxima de um ponto crítico, o menor autovalor  $\mu^{(0)}$  se aproxima de 1 por valores maiores que 1. Nesse sentido, propõe-se que a força de perturbação seja determinada uma só vez quando  $\mu^{(0)} < 1,1$ . Para o primeiro passo no qual esse critério é atingido fixa-se também o fator de carga  $\lambda_p$  a ser utilizado na Equação (4.19).

A força de perturbação a ser aplicada é aqui determinada com base no autovetor correspondente ao modo crítico escolhido (usualmente o menor autovalor  $\mu^{(0)}$ ) para a determinação da trajetória. Primeiramente, uma configuração “perturbada”  $\mathbf{\Upsilon}^{per}$  é determinada por meio da seguinte expressão:

$$\mathbf{\Upsilon}^{per} = \mathbf{\Upsilon}_p \pm \alpha \frac{\delta \mathbf{\Upsilon}^{(k)}}{\|\delta \mathbf{\Upsilon}^{(k)}\|} \quad (4.21)$$

em que  $k$  é o modo crítico escolhido,  $\delta\Upsilon^{(k)}$  é o autovetor correspondente,  $\alpha$  é um fator de escala que ajusta a intensidade da perturbação aplicada e  $\Upsilon_p$  é o vetor de parâmetros nodais no passo  $p$ .

A força de perturbação a ser aplicada corresponde à força necessária para se chegar à configuração  $\Upsilon^{per}$  menos a força já determinada para se chegar à configuração  $\Upsilon_p$ , isto é:

$$\mathbf{f}^{per} = \int_{\Omega_0} \left( \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \Upsilon} \right) \Big|_{\Upsilon^{per}} d\Omega_0 - \mathbf{f}^{int}(\Upsilon_p) \quad (4.22)$$

Ressalta-se aqui que estratégia semelhante de determinação da força de perturbação já foi utilizada para o elemento finito aqui apresentado (SOARES; PACCOLA; CODA, 2019). Entretanto, a força de perturbação no referido trabalho foi aplicada sobre a configuração inicial e mantida durante toda a análise e não estavam implementados o método do comprimento de arco e as forças não-conservativas. A novidade aqui está na imposição da força de perturbação em alguns passos da análise para induzir o método Arc-Length a seguir um dos ramos da trajetória bifurcada incluindo-se a presença de forças não-conservativas, sendo o restante da trajetória determinada sem a presença de qualquer força de perturbação (SOARES; PACCOLA; CODA, 2021b).

## 4.4 Exemplos numéricos

Alguns exemplos numéricos são apresentados nesta seção para demonstrar a aplicabilidade da formulação proposta na determinação de trajetórias de equilíbrio para além de um ponto de bifurcação. Esses exemplos também estão em Soares, Paccola e Coda (2021b).

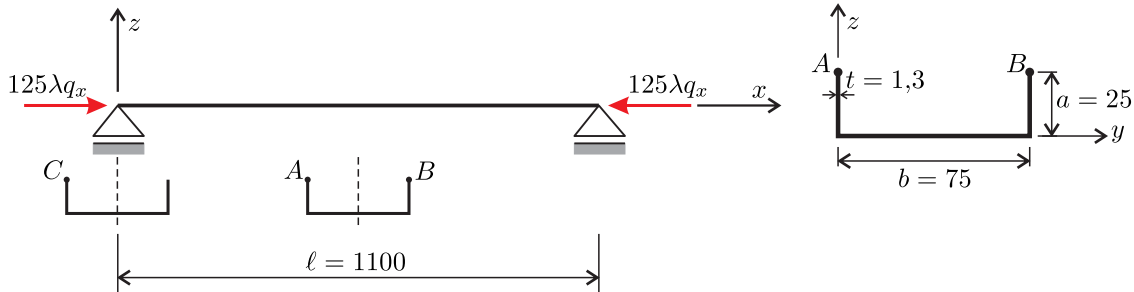
### 4.4.1 Perfil U

O primeiro exemplo deste capítulo trata da análise de compressão de um perfil U, com o intuito de verificar a determinação de cargas críticas e comparar as trajetórias de equilíbrio resultantes. Este exemplo foi estudado numericamente por Garcea (2001), em que o esquema estático e as dimensões utilizadas estão apresentadas na Figura 17. O material empregado possui as seguintes propriedades:  $E = 2,1 \cdot 10^6$  e  $\nu = 0,3$ . As condições de contorno em deslocamento são:  $u_z(0, y, 0) = u_z(\ell, y, 0) = u_y(0, 0, 0) = u_y(\ell, 0, 0) = u_x(\ell/2, 0, 0) = 0$ . Para as análises realizadas utilizou-se  $q_x = 1,0$  e variou-se apenas o fator  $\lambda$ .

Além da força de compressão atuante, outras situações envolvendo a presença de imperfeições foram analisadas. Essas imperfeições foram representadas por meio de duas forças concentradas atuando na seção central da peça estrutural. Conforme apresentado por

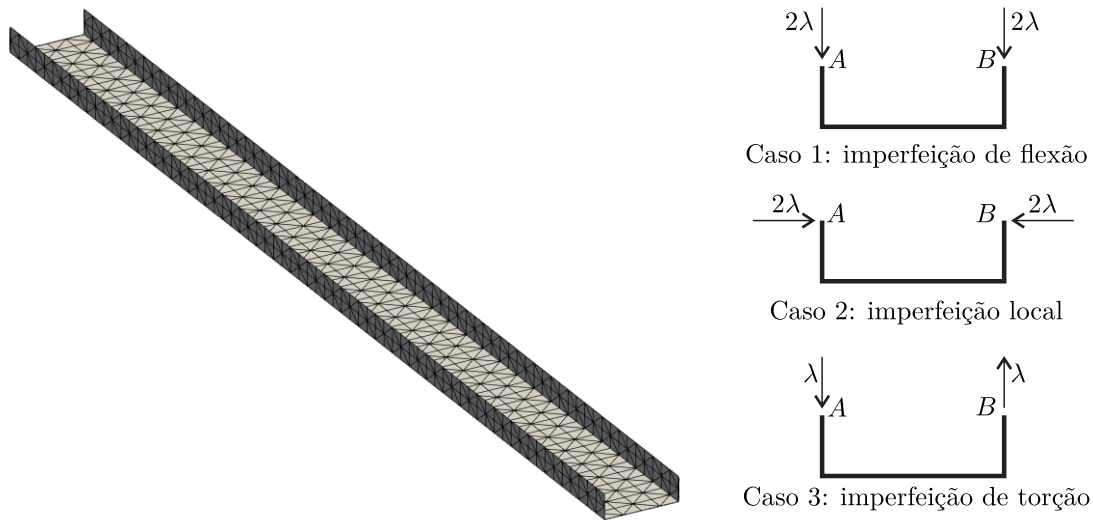
Garcea (2001), três situações de imperfeição foram definidas, de acordo com a Figura 18. Nela, é apresentada também a discretização utilizada, correspondendo a uma malha constituída de 5275 nós e 1120 elementos finitos triangulares com aproximação cúbica.

Figura 17 – Esquema estático e detalhe da seção transversal



Fonte: Autor.

Figura 18 – Discretização utilizada e forças de imperfeição impostas



Fonte: Autor.

De início, uma análise linear de estabilidade é realizada. As cargas críticas obtidas para as três situações de imperfeição, juntamente com os resultados apresentados em Garcea (2001), estão presentes nas Tabelas 1, 2 e 3. As diferenças relativas são calculadas com relação aos valores do Nastran, obtidos por Garcea (2001). Os resultados apresentam boa concordância entre si, levando em consideração a variabilidade dos resultados devido às diferentes cinemáticas comparadas. Observa-se que, de modo geral, os valores aqui obtidos foram menores que os valores de referência, ressaltando a flexibilidade da cinemática adotada e do elemento finito utilizado.

Utilizando a estratégia do comprimento de arco, procura-se determinar a trajetória de equilíbrio para as três condições de imperfeição apresentadas. Em todos os casos foram adotados os mesmos parâmetros para o método, a saber:  $n_d = 4$  (número de iterações desejado),  $\gamma = 1,0$  (fator de proporção de mudança do raio do arco). Para o primeiro passo nas situações que possuem imperfeição foi adotado  $\Delta\lambda_0 = 1,0$ .

Tabela 1 – Autovalores para modo de imperfeição de flexão

Modo	Garcea (2001)			MEF	Dif. (%)	Tipo de modo
	Mixed	Frozen	Nastran	Posicional		
1	1291,6	1292,2	1298,2	1291,5	0,52	Flexão
2	1396,0	1192,5	1195,2	1188,9	0,53	Torção
3	1994,4	1992,8	1919,4	1909,0	0,54	Local (3 semi-ondas)
4	2046,4	2044,7	2094,5	1955,1	6,66	Local (4 semi-ondas)

Fonte: Autor.

Tabela 2 – Autovalores para modo de imperfeição local

Modo	Garcea (2001)			MEF	Dif. (%)	Tipo de modo
	Mixed	Frozen	Nastran	Posicional		
1	1293,2	1289,9	1296,1	1289,4	0,52	Flexão
2	1409,5	1387,7	1391,2	1383,9	0,52	Torção
3	3150,7	3134,3	3084,8	3083,1	0,06	Local (13 semi-ondas)
4	3150,9	3148,6	3097,4	3088,6	0,28	Local (14 semi-ondas)

Fonte: Autor.

Tabela 3 – Autovalores para modo de imperfeição de torção

Modo	Garcea (2001)			MEF	Dif. (%)	Tipo de modo
	Mixed	Frozen	Nastran	Posicional		
1	1264,9	1289,9	1296,0	1289,4	0,51	Flexão
2	1833,9	1711,8	1715,6	1706,3	0,54	Torção
3	2808,5	2912,1	2842,4	2837,4	0,18	Local (7 semi-ondas)
4	2823,9	2930,0	2863,5	2855,5	0,28	Local (8 semi-ondas)

Fonte: Autor.

Para o caso em que não houve imposição das imperfeições pré-definidas, foi utilizado um procedimento específico para a determinação da trajetória. Para o trecho inicial estável antes do ponto de bifurcação, define-se um raio máximo de modo que o ponto crítico não seja facilmente ultrapassado. O valor do raio máximo adotado para este trecho foi de  $\Delta s = 0,005$ , o qual foi obtido a partir de tentativas. Um outro modo de se escolher o raio máximo é a partir da definição de um número de passos que o método deve percorrer até chegar no ponto crítico. Nesse caso, após a análise de autovalor do primeiro passo, determina-se  $\Delta \bar{\lambda} = \Delta \lambda_0 \mu_0 / n_p$ , sendo  $\mu_0$  o menor autovalor e  $n_p$  o número desejado de passos para percorrer o trecho estável. Reinicia-se a análise da estrutura com o incremento de carga inicial  $\Delta \lambda_0 = \Delta \bar{\lambda}$ . O raio determinado neste primeiro passo é mantido fixo durante todo o trecho estável da trajetória de equilíbrio.

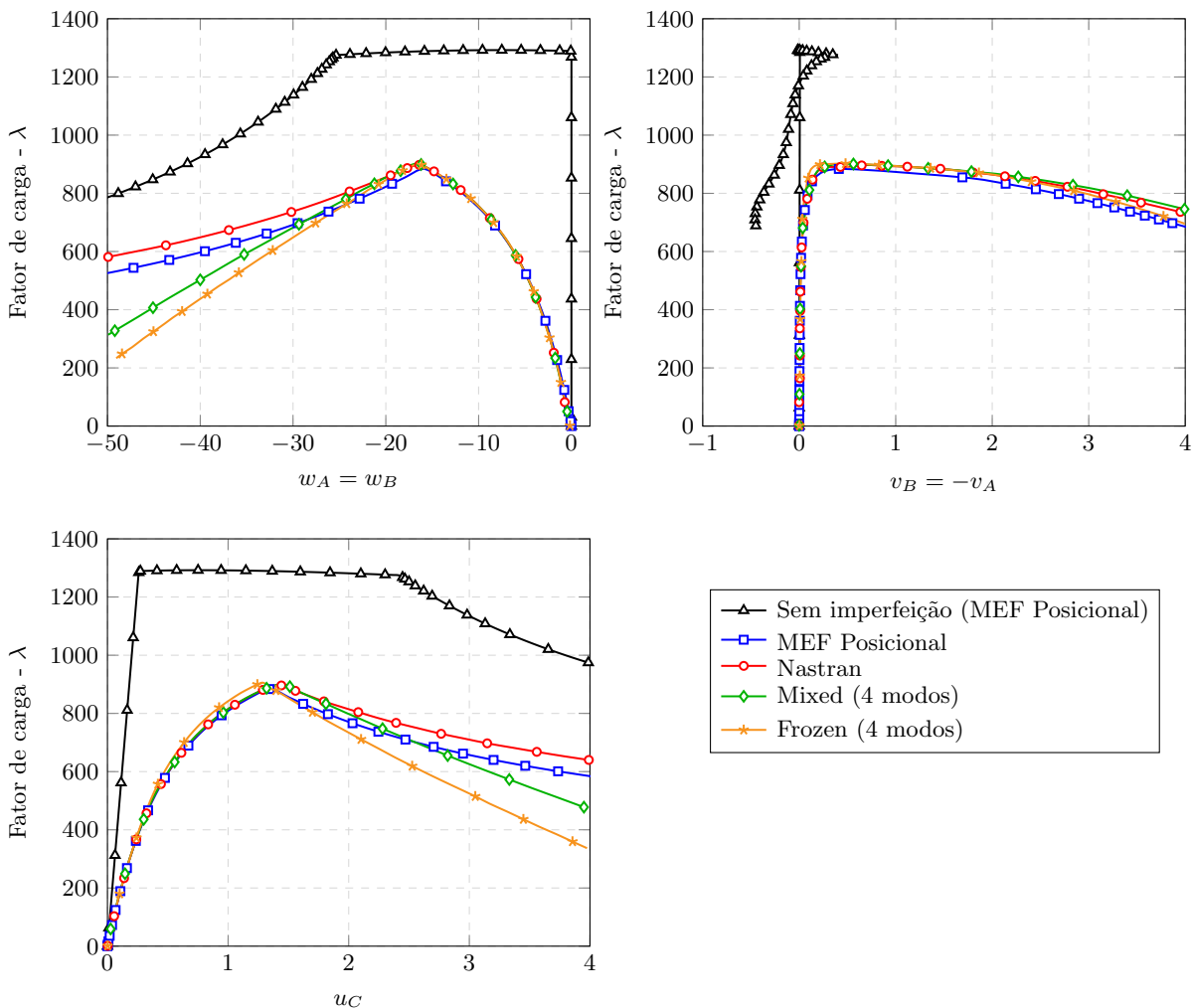
Em cada passo do trecho inicial, uma análise de estabilidade, baseada no problema de autovalor, é realizada. No passo em que o menor autovalor se torna menor que 1,1, considera-se que a análise está suficientemente próxima do ponto crítico, e a força de imperfeição é aplicada. Para tanto, fixa-se  $\lambda_p = \lambda$ .

Utilizando-se as equações (4.21) e (4.22), a força de imperfeição é determinada para  $\alpha = 0,001$ . Esta força é aplicada gradualmente durante alguns passos e é retirada em seguida. Para este exemplo, a aplicação foi realizada apenas nos três passos seguintes à sua determinação. Após a retirada da força de imperfeição, a análise posterior seguiu a trajetória bifurcada correspondente, conforme esperado.

Neste exemplo, o resultado da análise sem a imposição das imperfeições pré-definidas é utilizada para comparação com as demais situações. Inicialmente, apresentam-se na Figura 19 as trajetórias de equilíbrio obtidas para os deslocamentos dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (vide Figura 17) para o caso 1 (imperfeição de flexão).

Nota-se que, neste caso, o valor da força de imperfeição é elevado. Isso é evidenciado pelo distanciamento das trajetórias quando impõe-se ou não o par de forças de imperfeição. Observa-se também que as trajetórias de equilíbrio aqui obtidas se adequam às trajetórias de referência, validando a formulação implementada.

Figura 19 – Gráficos para imperfeição de flexão



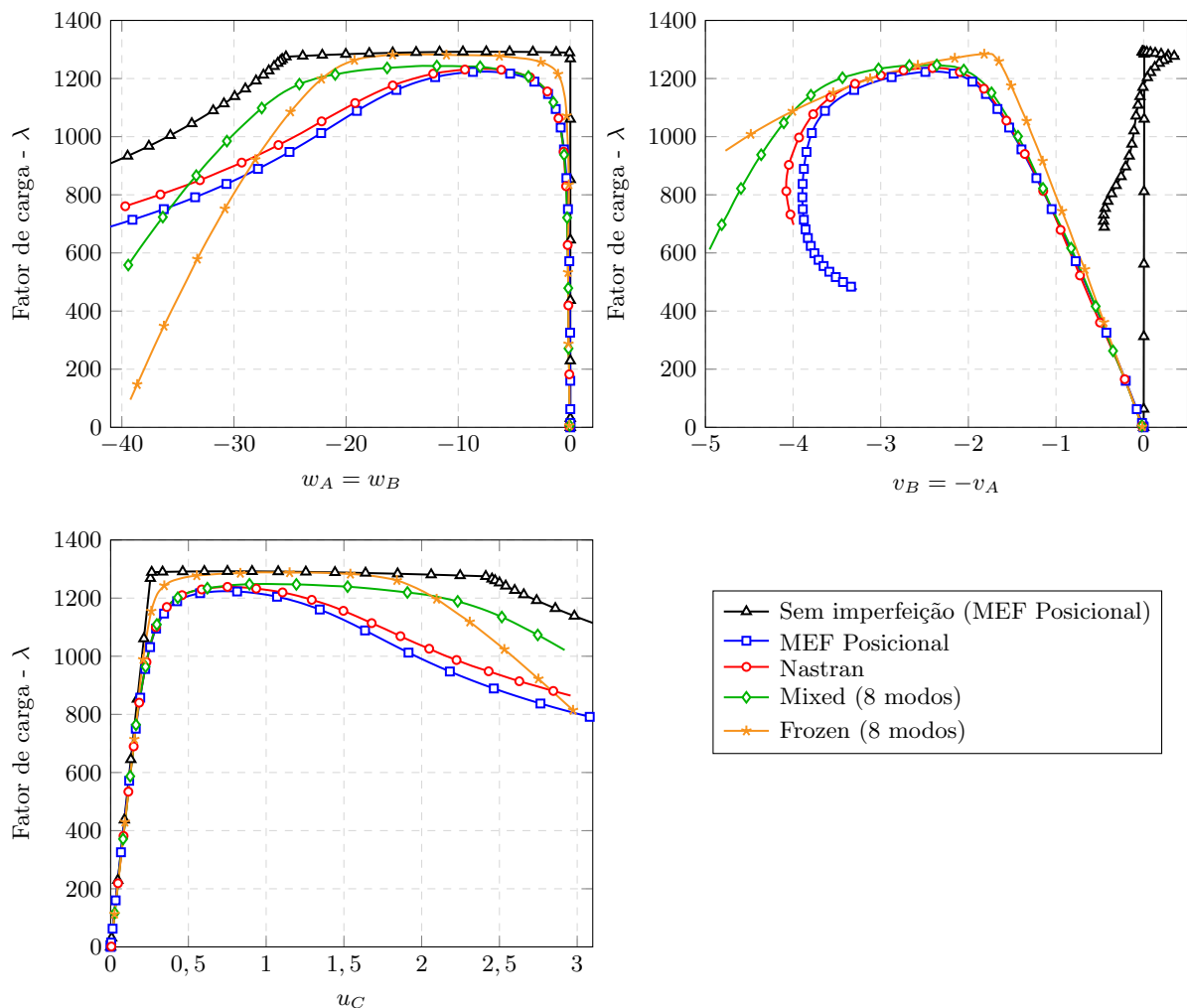
Fonte: Autor.



As cinemáticas apresentadas por Garcea (2001), denominadas Mixed e Frozen, exibem trajetórias que se distanciam das demais curvas no regime pós-crítico. Isso ocorre porque, para essas cinemáticas, as trajetórias obtidas são baseadas em uma expansão dos modos de instabilidade. O número de modos utilizados para cada caso estão indicados nas legendas dos gráficos.

O caso 2, referente à imperfeição local, está apresentado na Figura 20. Neste caso, observa-se que as curvas estão mais próximas da trajetória obtida sem a presença de imperfeições. Nota-se novamente que as trajetórias aqui obtidas possuem boa aderência aos resultados de referência, principalmente com relação ao Nastran, cujo procedimento não-linear é semelhante ao apresentado neste trabalho, não envolvendo expansão de modos.

Figura 20 – Gráficos para imperfeição local



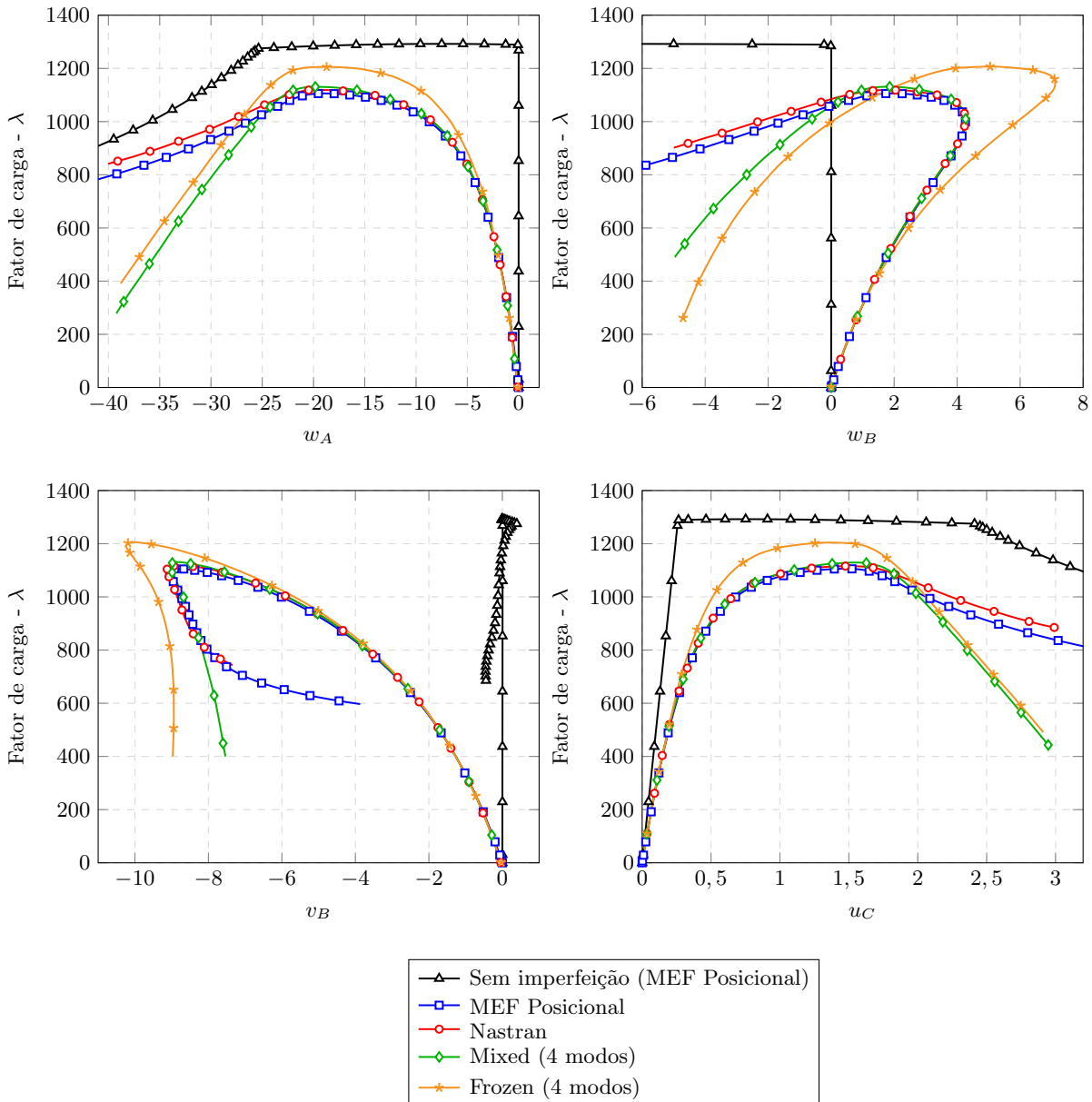
Fonte: Autor.

Por fim, os gráficos para a situação de imperfeição de torção, caso 3, estão apresentados na Figura 21. Os resultados para este caso são semelhantes aos observados nos casos anteriores.

Nota-se que, em todos os casos de imperfeição, o pico das trajetórias de equilíbrio aqui obtidas se localiza ligeiramente abaixo dos demais picos. Isso confirma a previsão observada a partir da análise dos autovalores. Esse efeito é constatado também na trajetória pós-crítica, a qual se apresenta sempre abaixo da trajetória do Nastran, que é a referência que mais se aproxima da formulação aqui utilizada.

Para efeito de comparação numérica, na Tabela 4 são apresentados os valores das cargas críticas obtidos a partir da análise de estabilidade ao longo da trajetória de equilíbrio. Verifica-se então de forma mais precisa que a formulação utilizada admite valores de carga crítica menores não só para análise linear de estabilidade, mas também para análise ao longo da trajetória de equilíbrio.

Figura 21 – Gráficos para imperfeição de torção



Fonte: Autor.

Tabela 4 – Cargas críticas obtidas via análise por meio da trajetória de equilíbrio

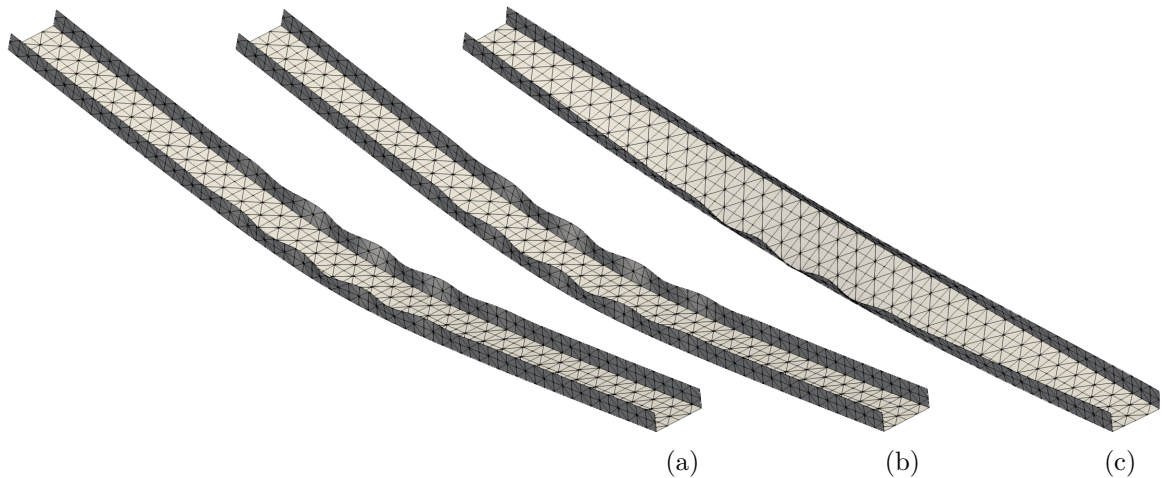
Imperfeição	Garcea (2001)			MEF Posicional	Dif. (%)
	Mixed	Frozen	Nastran		
Nenhuma	–	–	–	1289,2	–
Flexão	900,3	908,4	896,3	883,7	1,41
Local	1246,1	1284,8	1235,4	1223,3	0,98
Torção	1128,7	1204,2	1117,0	1105,9	0,99

Fonte: Autor.

Desse modo, conclui-se que a formulação é adequada para este tipo de análise. Ressalta-se também a vantagem de produzir soluções favoráveis à segurança, as quais são obtidas desde que se utilize uma discretização adequada.

Para efeito de ilustração, apresentam-se na [Figura 22](#) as configurações pós-críticas para cada caso de imperfeição imposta. Nota-se que, em todos os casos, a configuração atual corresponde a uma composição de modos. Nos casos (a) e (b), é observado composição do modo global de flexão com um modo local de instabilidade das mesas do perfil. No caso (c), há a composição do modo global de torção com um modo local.

Figura 22 – Configurações pós-críticas para as seguintes situações: (a) imperfeição de flexão, (b) imperfeição local e (c) imperfeição de torção



Fonte: Autor.

#### 4.4.2 Tubo sob pressão lateral externa

Este segundo exemplo consiste de um tubo cilíndrico submetido a uma pressão lateral externa uniforme. O tubo possui raio  $r = 6 \text{ cm}$  e espessura  $t = 0,12 \text{ cm}$ . Três comprimentos foram analisados:  $L = 20 \text{ cm}$ ,  $L = 50 \text{ cm}$  (tubos curtos) e  $L = 400 \text{ cm}$  (tubo longo). Em ambas as extremidades do tubo, restringiu-se os deslocamentos no plano da seção transversal. O material utilizado possui as seguintes propriedades:  $E = 210 \text{ GPa}$  e  $\nu = 0,3$ . Para a análise linear de estabilidade, aplicou-se uma pressão externa de  $1,0 \text{ MPa}$ . Os resultados obtidos foram comparados com [Basaglia, Camotim e Silvestre \(2019\)](#).

A carga crítica deste problema, bem como as trajetórias de equilíbrio resultantes, depende da natureza da pressão lateral atuante. Essa pressão pode ser conservativa, ou seja, que não altera a energia ao sistema no decorrer da análise e, em geral, sua intensidade não depende da configuração deformada da estrutura. A pressão também pode ser de natureza não-conservativa, sendo, em geral, dependente da configuração deformada. Para cada um dos casos, a carga crítica de instabilidade, considerando tubos longos, é fornecida como (IWATA; TSUKIMORI; KUBO, 1991):

$$p_{cr,1} = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{t^3}{4r^3} \quad (\text{pressão não-conservativa}) \quad (4.23a)$$

$$p_{cr,2} = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{t^3}{3r^3} \quad (\text{pressão conservativa}) \quad (4.23b)$$

As discretizações utilizadas para os comprimentos de 20, 50 e 400 *cm* possuem, respectivamente, 37296, 40992 e 180096 graus de liberdade. Os resultados considerando pressão conservativa e não-conservativa estão apresentados na Tabela 5. Os dados referentes às colunas GBT e ANSYS da tabela foram extraídos de Basaglia, Camotim e Silvestre (2019).

Tabela 5 – Cargas críticas (em *MPa*) para tubo sob pressão lateral externa

<i>L</i> ( <i>cm</i> )	Pressão não-conservativa				Pressão conservativa			
	$p_{cr,1}$	GBT	ANSYS	MEF Pos.	$p_{cr,2}$	GBT	ANSYS	MEF Pos.
20	–	3,4149	3,4232	3,3493	–	3,5273	3,5634	3,5570
50	–	1,4097	1,4184	1,3995	–	1,5742	1,5712	1,5703
400	0,4615	0,4624	0,4659	0,4626	0,6154	0,6165	0,6176	0,6165

Fonte: Autor.

Os resultados obtidos via MEF Posicional se mostram em conformidade com os demais valores de referência da Tabela 5. Essa conformidade se expressa inclusive no caso de pressão não-conservativa, onde foi realizada a simetrização da matriz hessiana. Portanto, observa-se que a utilização da parte simétrica da matriz contribuinte conduz a resultados satisfatórios, conforme esperado.

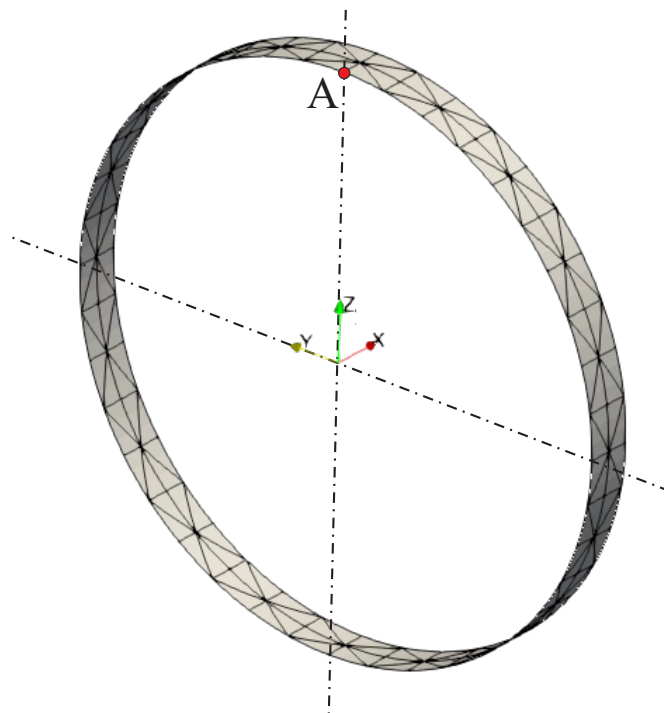
Verifica-se também a acurácia da formulação para as análises de estabilidade ao longo da trajetória de equilíbrio. Para isso, um novo esquema estático é elaborado visando uma simplificação do modelo. Dessa forma, definiu-se uma discretização com  $L = 1$  *cm* e um total de 5880 graus de liberdade, conforme Figura 23. Para a simulação de um tubo longo, aplicou-se restrições apenas para eliminar deslocamentos de corpo rígido, mantendo livres os deslocamentos no plano da seção transversal. Para eliminar a flexão gerada na direção longitudinal do tubo devido ao efeito de Poisson, restringiu-se também a componente longitudinal dos vetores generalizados de todos os nós.

Para confirmar a validade do novo modelo, uma análise linear de estabilidade foi realizada. As cargas críticas obtidas, em *MPa*, considerando pressão não-conservativa e

conservativa, respectivamente, são: 0,4615 e 0,6152. Esses resultados são praticamente idênticos à solução analítica, validando o esquema proposto.

A análise ao longo da trajetória de equilíbrio seguiu o mesmo procedimento realizado para o exemplo anterior. O incremento de carga inicial foi de  $\Delta\lambda_0 = 0,05$ , sendo mantido constante até se alcançar o ponto crítico. Adotou-se  $\alpha \pm 0,01$  para a determinação da força de imperfeição. O sinal de  $\alpha$  determina qual ramo da trajetória bifurcada o método deverá seguir.

Figura 23 – Discretização do tubo para determinação da trajetória de equilíbrio



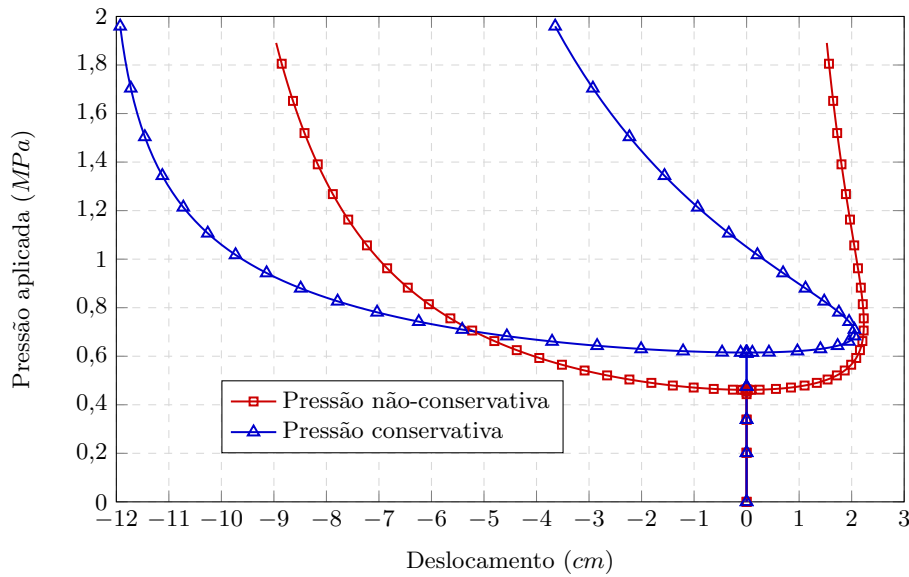
Fonte: Autor.

Apresenta-se na [Figura 24](#) as trajetórias de equilíbrio referentes aos casos de pressão não-conservativa e conservativa. O ponto escolhido para a determinação dessas trajetórias se situa sobre o eixo de simetria da estrutura deformada, sendo observado seu deslocamento radial.

Observa-se nas trajetórias de equilíbrio da [Figura 24](#) que os pontos de bifurcação estão situados no fator de carga previsto pela análise linear de estabilidade. Isso ocorreu nesse caso, pois o trecho inicial da trajetória se situa no regime de pequenos deslocamentos.

Outro aspecto importante a se analisar é a diferença entre as trajetórias geradas para pressão não-conservativa e conservativa. Observa-se uma diferença considerável no valor de carga crítica, chegando a ser aproximadamente 25% menor quando considera-se pressão não-conservativa. Conclui-se, portanto, que o efeito de uma pressão não-conservativa não deve ser desprezado nas análises de estabilidade, sob a penalidade de se estar contra à segurança.

Figura 24 – Trajetórias de equilíbrio para tubo sob pressão lateral externa

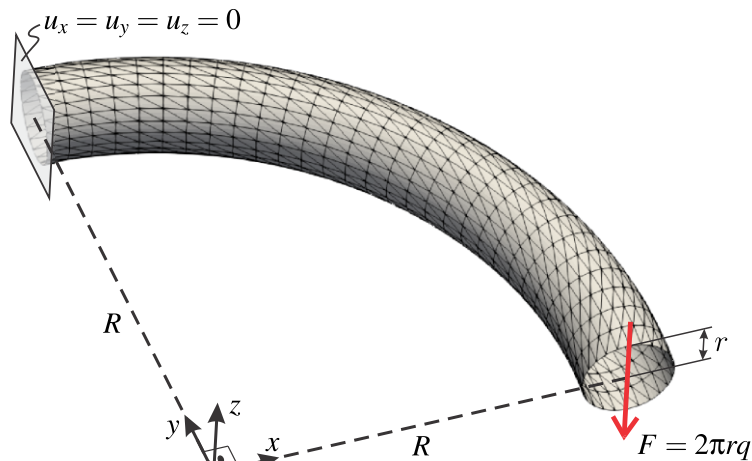


Fonte: Autor.

#### 4.4.3 Toroide submetido a flexão e torção

Este último exemplo é um toroide engastado em uma extremidade e sujeito a uma força transversal atuando na outra extremidade, conforme [Figura 25](#). As dimensões que definem o toroide são:  $R = 100 \text{ cm}$ ,  $r = 10 \text{ cm}$  e espessura  $t = 0,5 \text{ cm}$ . O carregamento aplicado corresponde a uma força distribuída  $q = 0,1 \lambda \text{ N/cm}$  atuando no sentido negativo do eixo  $z$  ao longo do perímetro da extremidade livre. O material empregado possui as seguintes propriedades:  $E = 21000 \text{ N/cm}^2$  e  $\nu = 0,3$ . A discretização adotada está apresentada na [Figura 25](#) e corresponde a 1392 elementos finitos triangulares com aproximação cúbica e 44352 graus de liberdade.

Figura 25 – Esquema estático e discretização do toroide submetido a uma força transversal



Fonte: Autor.

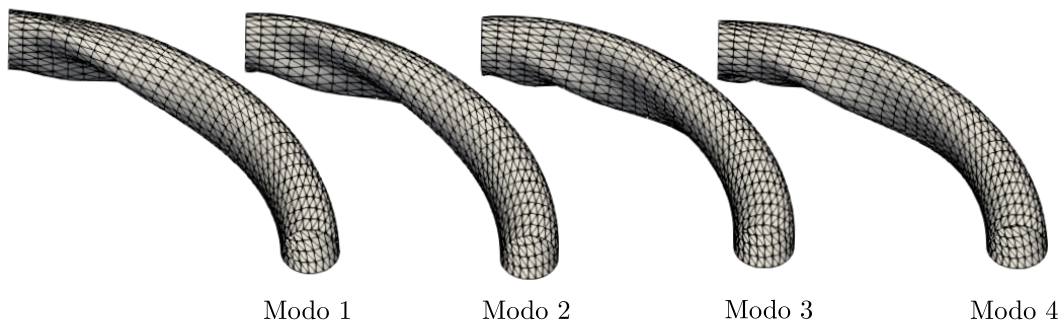
Inicialmente, para  $\lambda = 1,0$ , determinou-se as cargas críticas correspondentes ao regime de pequenos deslocamentos. Os valores obtidos para os quatro primeiros modos estão apresentados na [Tabela 6](#) e os respectivos modos estão apresentados na [Figura 26](#).

Tabela 6 – Cargas críticas (em *MPa*) para toroide sob flexão e torção

Modo	Fator de carga crítica ( $\lambda$ )
1	67,9609
2	68,4315
3	75,8721
4	76,1218

Fonte: Autor.

Figura 26 – Modos de instabilidade para toroide sob flexão e torção



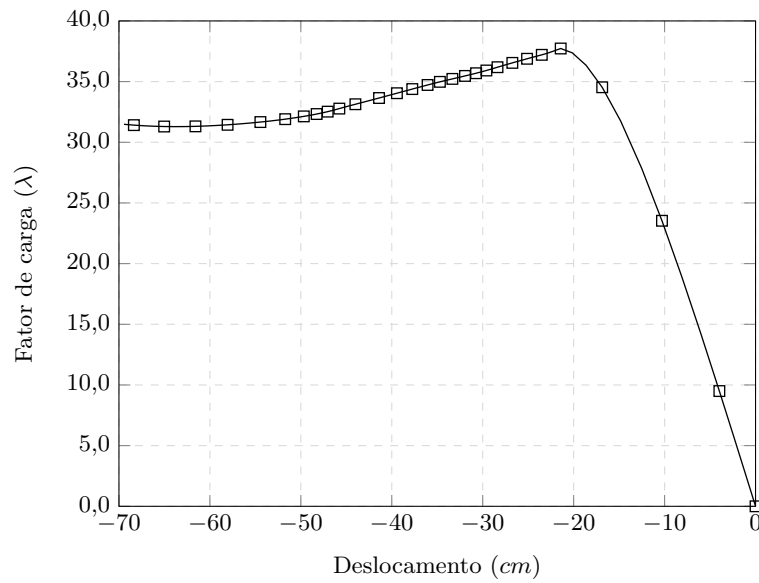
Fonte: Autor.

Realizou-se também uma análise em grandes deslocamentos de forma a se obter a trajetória de equilíbrio, bem como a determinação mais precisa da carga crítica real. A trajetória de equilíbrio foi obtida por meio da estratégia do comprimento de arco, sendo sua representação para o ponto inferior da extremidade livre apresentada na [Figura 27](#).

Da trajetória apresentada na [Figura 27](#) o fator de carga crítico obtido é de 37,7. Este valor é 44,5% menor que o valor do primeiro modo da [Tabela 6](#), onde foi considerado a hipótese de pequenos deslocamentos. Dessa forma, observa-se que para estruturas mais gerais o valor da carga crítica pode ser consideravelmente diferente quando se consideram pequenos ou grandes deslocamentos. Esse fenômeno é observado principalmente em estruturas que apresentam trajetórias de equilíbrio não-lineares (grandes deslocamentos) em trecho anterior ao ponto crítico.

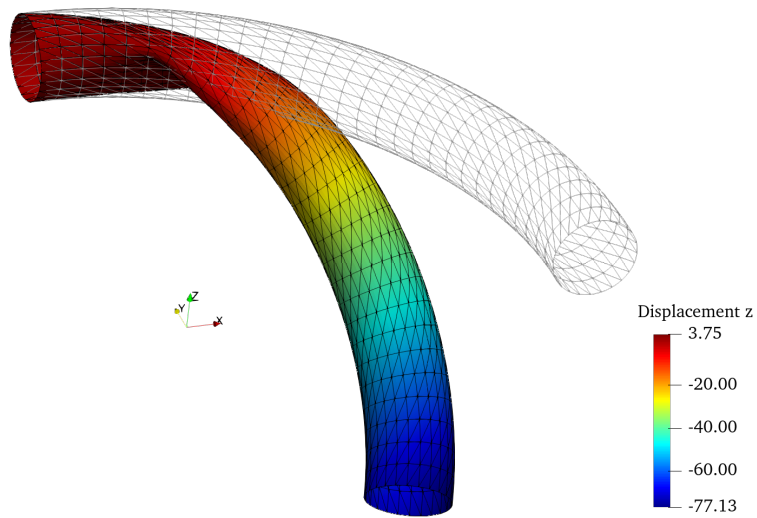
Para efeito de ilustração, na [Figura 28](#) apresenta-se a configuração deslocada final da estrutura. Assim como nos modos obtidos via análise linear de estabilidade, a região mais próxima do apoio foi a que mais sofreu deformações.

Figura 27 – Trajetória de equilíbrio para deslocamento na direção  $z$  na extremidade de aplicação da força



Fonte: Autor.

Figura 28 – Configuração deformada para o último passo da análise ( $\lambda = 31,48$ )



Fonte: Autor.



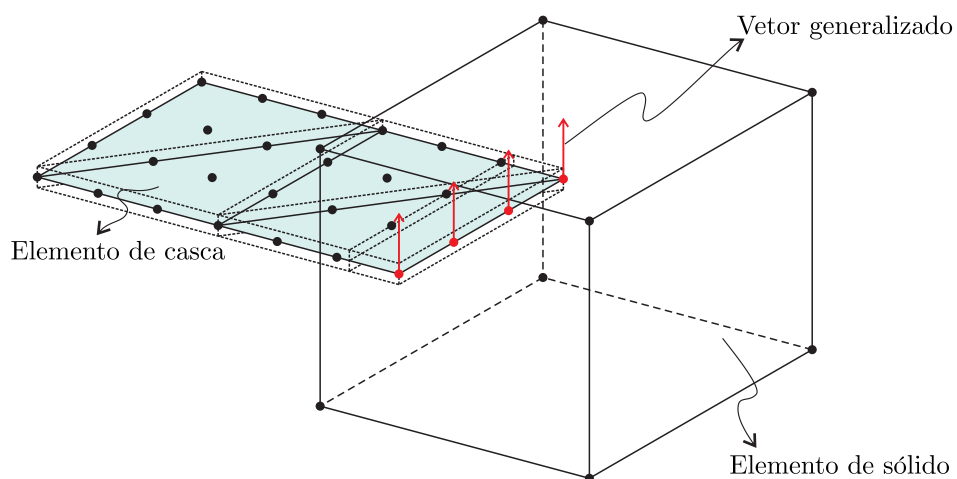
## CAPÍTULO 5

# ACOPLAMENTO CINEMÁTICO ENTRE ELEMENTOS FINITOS

No contexto das estruturas compostas por perfis de parede fina, a modelagem da conexão entre esses perfis é dificultada pela complexidade da geometria dessas regiões e pelos dispositivos de ligação utilizados. Dessa forma, surge a necessidade de refinamento mais acentuado da malha de elementos finitos de forma a capturar precisamente o comportamento da conexão.

A metodologia aqui proposta para simplificar o tratamento dessas conexões corresponde à realização do acoplamento por meio de um elemento finito de sólido tridimensional. Esse elemento finito de sólido é definido de forma a ser possível embutir as extremidades dos perfis que se encontram em determinada região, como exemplificado na [Figura 29](#).

Figura 29 – Intuição do acoplamento casca-sólido



Fonte: Autor.

A ideia central do acoplamento aqui proposto já foi realizada por outros trabalhos do presente grupo de pesquisa ([VANALLI; PACCOLA; CODA, 2008](#); [SAMPAIO; PACCOLA; CODA, 2013](#); [PACCOLA; SAMPAIO; CODA, 2015](#); [SAMPAIO; PACCOLA; CODA, 2015](#);

PACCOLA; PIEDADE NETO; CODA, 2015; PACCOLA; CODA, 2016). Esses trabalhos realizaram basicamente acoplamento fibra-matriz, em que a fibra é modelada com elemento finito de barra simples e a matriz pode ser elemento finito de sólido bi ou tridimensional, elemento de casca, dentre outros. A ideia desse acoplamento é escrever a posição dos nós da fibra em função dos graus de liberdade dos elementos finitos do meio no qual a fibra está imersa. Dessa forma, é eliminada a necessidade de coincidência de nós na discretização e não são acrescentados graus de liberdade ao problema.

Inspirado nesta ideia, pretende-se realizar aqui o acoplamento dos graus de liberdade do elemento de casca, mais precisamente posição e vetor generalizado, ao elemento de sólido tridimensional. O acoplamento das posições nodais é realizado de forma semelhante ao apresentado nos demais trabalhos do grupo de pesquisa. A novidade aqui está no acoplamento do vetor generalizado, cujo desenvolvimento numérico será apresentado mais adiante. Esses desenvolvimentos resultaram em Soares, Paccola e Coda (2021a).

Para fins de organização, será apresentado inicialmente a formulação geral de acoplamento. Em seguida, serão apresentados separadamente o acoplamento de posição e o acoplamento de vetor generalizado, respectivamente. Logo após, são discutidos os aspectos de generalização e implementação computacional. Por fim, apresentam-se os exemplos numéricos de validação e aplicação.

### 5.1 Forma fraca e sua linearização

Denota-se por  $\mathcal{E}$  um potencial de energia genérico associado ao elemento finito que possui graus de liberdade a serem embutidos (casca, treliça etc.), podendo representar energia de deformação, energia cinética etc. A primeira variação de  $\mathcal{E}$  pode ser escrita como:

$$\delta\mathcal{E} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\bar{\mathbf{Y}}} \cdot \delta\bar{\mathbf{Y}} + \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\hat{\mathbf{Y}}} \cdot \delta\hat{\mathbf{Y}} = \delta\bar{\mathbf{Y}}^T \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\bar{\mathbf{Y}}} + \delta\hat{\mathbf{Y}}^T \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\hat{\mathbf{Y}}} \quad (5.1)$$

sendo  $\hat{\mathbf{Y}}$  e  $\bar{\mathbf{Y}}$  os vetores de parâmetros nodais embutidos e não-embutidos, respectivamente, do elemento finito considerado.

O vetor de parâmetros nodais embutidos,  $\hat{\mathbf{Y}}$ , será escrito em função das posições nodais  $\mathbf{y}$  do elemento finito de sólido. Assim, tem-se que  $\delta\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{\Psi}\delta\mathbf{y}$ , sendo  $\mathbf{\Psi}$  a matriz de transformação definida a partir das grandezas que serão acopladas. Portanto, a primeira variação de  $\mathcal{E}$  resulta:

$$\delta\mathcal{E} = \delta\bar{\mathbf{Y}}^T \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\bar{\mathbf{Y}}} + \delta\mathbf{y}^T \mathbf{\Psi}^T \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\hat{\mathbf{Y}}} = \left\{ \delta\bar{\mathbf{Y}}^T \quad \delta\mathbf{y}^T \right\} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\bar{\mathbf{Y}}} \\ \mathbf{\Psi}^T \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\hat{\mathbf{Y}}} \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Da Equação (5.2), o vetor de forças associado ao potencial  $\mathcal{E}$  é expresso como:

$$\mathbf{f}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \\ \Psi^T \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

A linearização da forma fraca é aqui denotada por  $\Delta \delta \mathcal{E}$  e definida como segue:

$$\begin{aligned} \Delta \delta \mathcal{E} &= \delta \bar{\mathbf{Y}}^T \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}} \Delta \bar{\mathbf{Y}} + \delta \bar{\mathbf{Y}}^T \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \hat{\mathbf{Y}}} \Delta \hat{\mathbf{Y}} + \\ &+ \delta \hat{\mathbf{Y}}^T \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}} \Delta \bar{\mathbf{Y}} + \delta \hat{\mathbf{Y}}^T \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{Y}} \otimes \partial \hat{\mathbf{Y}}} \Delta \hat{\mathbf{Y}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

ou, em notação matricial:

$$\Delta \delta \mathcal{E} = \begin{Bmatrix} \delta \bar{\mathbf{Y}}^T & \delta \hat{\mathbf{Y}}^T \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \hat{\mathbf{Y}}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{Y}} \otimes \partial \hat{\mathbf{Y}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{Y}} \\ \Delta \hat{\mathbf{Y}} \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Fazendo  $\delta \hat{\mathbf{Y}} = \Psi \delta \mathbf{y}$  e  $\Delta \hat{\mathbf{Y}} = \Psi \Delta \mathbf{y}$  obtém-se:

$$\Delta \delta \mathcal{E} = \begin{Bmatrix} \delta \bar{\mathbf{Y}}^T & \delta \mathbf{y}^T \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \hat{\mathbf{Y}}} \Psi \\ \Psi^T \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}} & \Psi^T \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{Y}} \otimes \partial \hat{\mathbf{Y}}} \Psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{\mathbf{Y}} \\ \Delta \mathbf{y} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

Da Equação (5.6), a matriz Hessiana associada ao potencial  $\mathcal{E}$  é explicitada como:

$$\mathbf{H}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}} \otimes \partial \hat{\mathbf{Y}}} \Psi \\ \Psi^T \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{Y}} \otimes \partial \bar{\mathbf{Y}}} & \Psi^T \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \hat{\mathbf{Y}} \otimes \partial \hat{\mathbf{Y}}} \Psi \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Nos casos em que não é conhecido o potencial  $\mathcal{E}$ , sua variação ainda pode ser escrita como:

$$\delta \mathcal{E} = \delta \bar{\mathbf{Y}}^T \bar{\mathbf{f}} + \delta \hat{\mathbf{Y}}^T \hat{\mathbf{f}} \quad (5.8)$$

sendo  $\bar{\mathbf{f}}$  e  $\hat{\mathbf{f}}$  os vetores de força associados aos graus de liberdade  $\bar{\mathbf{Y}}$  e  $\hat{\mathbf{Y}}$ , respectivamente.

De forma geral, o vetor de forças e a matriz Hessiana podem ser escritos como:

$$\mathbf{f}^{\mathcal{E}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ \Psi^T \hat{\mathbf{f}} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{H}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} & \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \Psi \\ \Psi^T \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} & \Psi^T \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \Psi \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Em seguida serão apresentadas as particularizações do acoplamento para posições nodais e vetores generalizados. Basicamente serão definidas expressões para a matriz  $\Psi$  em correspondência aos graus de liberdade que serão acoplados.

## 5.2 Acoplamento de posições nodais

Os graus de liberdade embutidos  $\hat{\mathbf{Y}}$  serão denotados por  $\hat{\mathbf{y}}^m$ , representando a posição de um nó  $m$  de um elemento finito embutido. Considerando que este nó está situado no interior de um elemento finito de sólido, sua posição nodal pode ser descrita por meio das funções de interpolação do elemento de sólido como:

$$\hat{\mathbf{y}}^m = \phi^\beta(\boldsymbol{\xi}^m) \mathbf{y}^\beta \quad (5.10)$$

sendo  $\phi^\beta(\boldsymbol{\xi}^m)$  a função de forma atrelada ao nó  $\beta$ , de posição  $\mathbf{y}^\beta$ , do elemento finito de sólido calculada no ponto  $\boldsymbol{\xi}^m = (\xi_1^m, \xi_2^m, \xi_3^m)$  correspondente ao nó  $m$  do elemento finito embutido.

A variação da Equação (5.10) é escrita como:

$$\delta \hat{\mathbf{y}}^m = \phi^\beta(\boldsymbol{\xi}^m) \delta \mathbf{y}^\beta \quad (5.11)$$

ou, em notação indicial:

$$\delta \hat{y}_p^m = \phi^\beta(\boldsymbol{\xi}^m) \delta y_p^\beta = [\phi^\beta(\boldsymbol{\xi}^m) \delta_{p\alpha}] \delta y_\alpha^\beta \quad (5.12)$$

Dessa forma, e lembrando que  $\delta \hat{\mathbf{Y}}_i = \Psi_{ij} \delta y_j$ , tem-se:

$$\Psi_{ij} = \phi^\beta(\boldsymbol{\xi}^m) \delta_{p\alpha} \quad (5.13)$$

em que  $\delta_{p\alpha}$  é o delta de Kronecker, nó  $m$  e direção  $p$  compõem o grau de liberdade embutido  $i$  e nó  $\beta$  e direção  $\alpha$  compõem o grau de liberdade  $j$ .

## 5.3 Acoplamento de vetores generalizados

Os graus de liberdade embutidos  $\hat{\mathbf{Y}}$  serão agora denotados por  $\hat{\mathbf{v}}^m$ , representando o vetor generalizado de um nó  $m$  de um elemento finito embutido. Propõe-se que as

componentes do vetor generalizado embutido variem em função do tensor gradiente da mudança de configuração do elemento de sólido. Dessa forma, tem-se:

$$\hat{\mathbf{v}}^m = \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})\mathbf{n}^m = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{x}}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})\mathbf{n}^m \quad (5.14)$$

em que não há somatório em  $m$  e  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})$  é o tensor gradiente da função mudança de configuração do elemento de sólido calculado no ponto de coordenadas paramétricas  $\boldsymbol{\xi}^m$  associado ao nó  $m$ .

Para o elemento de sólido tem-se que  $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}) = \phi^k(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))\mathbf{y}^k$ . Desenvolvendo a Equação (5.14) em notação indicial, obtém-se:

$$\hat{v}_i^m = \frac{\partial \zeta_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})n_j^m = \frac{\partial \phi^k}{\partial x_j}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})y_i^k n_j^m = \frac{\partial \phi^k}{\partial \mathbf{n}^m}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})y_i^k \quad (5.15)$$

sendo a derivada direcional da função de forma do nó  $k$  na direção do vetor  $\mathbf{n}^m$  calculada como:

$$\frac{\partial \phi^k}{\partial \mathbf{n}^m} = \frac{\partial \phi^k}{\partial x_j}n_j^m = \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_p} \frac{\partial \xi_p}{\partial x_j}n_j^m = \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_p}(A^0)_{pj}^{-1}n_j^m \quad (5.16)$$

sendo  $\mathbf{A}^0$  o gradiente da função de mapeamento da configuração inicial do elemento finito de sólido tridimensional.

Portanto, a relação entre vetor generalizado e as posições nodais do elemento de sólido se resume em:

$$\hat{\mathbf{v}}^m = \frac{\partial \phi^k}{\partial \mathbf{n}^m}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})\mathbf{y}^k \quad (5.17)$$

A variação da Equação (5.17) é escrita em notação indicial como:

$$\delta \hat{v}_p^m = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \mathbf{n}^m}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})\delta y_p^\beta = \left[ \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \mathbf{n}^m}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})\delta_{p\alpha} \right] \delta y_\alpha^\beta \quad (5.18)$$

Dessa forma, a matriz de transformação  $\Psi$  para acoplamento de vetores generalizados fica expressa em notação indicial como:

$$\Psi_{ij} = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \mathbf{n}^m}(\boldsymbol{\xi}^{(m)})\delta_{p\alpha} \quad (5.19)$$

em que nó  $m$  e direção  $p$  compõem o grau de liberdade embutido  $i$  e nó  $\beta$  e direção  $\alpha$  compõem o grau de liberdade  $j$ .

#### 5.4 Generalização e aspectos sobre implementação computacional

Caso se deseje acoplar a posição nodal e o vetor generalizado de um mesmo nó, a matriz de transformação  $\Psi$  é dada pela composição das expressões (5.13) e (5.19). Para exemplificar, considere que a posição e o vetor generalizado de apenas um nó serão embutidos em um elemento sólido de  $N$  nós. Neste caso, a matriz  $\Psi$  terá dimensão  $6 \times 3N$ , e a expressão  $\delta\hat{\Upsilon} = \Psi\delta\mathbf{y}$  é expandida como:

$$\begin{pmatrix} \delta\hat{y}_1 \\ \delta\hat{y}_2 \\ \delta\hat{y}_3 \\ \delta\hat{v}_1 \\ \delta\hat{v}_2 \\ \delta\hat{v}_3 \end{pmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \phi^1(\hat{\xi}) & 0 & 0 & \dots & \phi^N(\hat{\xi}) & 0 & 0 \\ 0 & \phi^1(\hat{\xi}) & 0 & \dots & 0 & \phi^N(\hat{\xi}) & 0 \\ 0 & 0 & \phi^1(\hat{\xi}) & \dots & 0 & 0 & \phi^N(\hat{\xi}) \\ \frac{\partial\phi^1}{\partial\mathbf{n}}(\hat{\xi}) & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial\phi^N}{\partial\mathbf{n}}(\hat{\xi}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\phi^1}{\partial\mathbf{n}}(\hat{\xi}) & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\phi^N}{\partial\mathbf{n}}(\hat{\xi}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\phi^1}{\partial\mathbf{n}}(\hat{\xi}) & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial\phi^N}{\partial\mathbf{n}}(\hat{\xi}) \end{bmatrix}_{6 \times 3N} \begin{pmatrix} \delta y_1^1 \\ \delta y_2^1 \\ \delta y_3^1 \\ \vdots \\ \delta y_1^N \\ \delta y_2^N \\ \delta y_3^N \end{pmatrix}_{3N \times 1} \quad (5.20)$$

sendo  $\hat{\xi}$  as coordenadas paramétricas do nó embutido.

Para uma situação mais geral, em que vários nós de um elemento finito estão embutidos em diferentes elementos de sólido, recomenda-se a montagem do vetor de forças internas e da matriz hessiana a partir da seguinte expressão:

$$\mathbf{f}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^C \\ \mathbf{f}_1^S \\ \mathbf{f}_2^S \\ \vdots \\ \mathbf{f}_M^S \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{CC} & \mathbf{H}_1^{CS} & \mathbf{H}_2^{CS} & \dots & \mathbf{H}_M^{CS} \\ \mathbf{H}_1^{SC} & \mathbf{H}_{11}^{SS} & \mathbf{H}_{12}^{SS} & \dots & \mathbf{H}_{1M}^{SS} \\ \mathbf{H}_2^{SC} & \mathbf{H}_{21}^{SS} & \mathbf{H}_{22}^{SS} & \dots & \mathbf{H}_{2M}^{SS} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_M^{SC} & \mathbf{H}_{M1}^{SS} & \mathbf{H}_{M2}^{SS} & \dots & \mathbf{H}_{MM}^{SS} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

em que os índices sobrescritos  $C$  e  $S$  se referem ao conjunto de graus de liberdade não-embutidos e embutidos, respectivamente, os índices subscritos indicam o elemento finito de sólido correspondente ao grau de liberdade embutido e  $M$  é o número de elementos finitos de sólido.

As componentes do vetor de forças da Equação (5.21) são escritas em notação indicial como:

$$\begin{aligned} (f^C)_i &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Upsilon_i} \\ (f_p^S)_i &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{y}_\alpha^m} \phi_p^\beta(\boldsymbol{\xi}^m) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{v}_\alpha^m} \frac{\partial \phi_p^\beta}{\partial \mathbf{n}^m}(\boldsymbol{\xi}^{(m)}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

As componentes da matriz hessiana da Equação (5.21) são escritas em notação indicial como:

$$\begin{aligned}
(H^{CC})_{ij} &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Upsilon_i \partial \Upsilon_j} \\
(H_q^{CS})_{ij} &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Upsilon_i \partial \hat{y}_\gamma^n} \phi_q^z(\boldsymbol{\xi}^n) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Upsilon_i \partial \hat{v}_\gamma^n} \frac{\partial \phi_q^z}{\partial \mathbf{n}^n}(\boldsymbol{\xi}^n) \\
(H_p^{SC})_{ij} &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{y}_\alpha^m \partial \Upsilon_j} \phi_p^\beta(\boldsymbol{\xi}^m) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{v}_\alpha^m \partial \Upsilon_j} \frac{\partial \phi_p^\beta}{\partial \mathbf{n}^m}(\boldsymbol{\xi}^m) \\
(H_{pq}^{SS})_{ij} &= \left( \phi_p^\beta(\boldsymbol{\xi}^m) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{y}_\alpha^m \partial \hat{y}_\gamma^n} \phi_q^z(\boldsymbol{\xi}^n) \right) + \left( \phi_p^\beta(\boldsymbol{\xi}^m) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{y}_\alpha^m \partial \hat{v}_\gamma^n} \frac{\partial \phi_q^z}{\partial \mathbf{n}^n}(\boldsymbol{\xi}^n) \right) + \\
&\quad \left( \frac{\partial \phi_p^\beta}{\partial \mathbf{n}^m}(\boldsymbol{\xi}^m) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{v}_\alpha^m \partial \hat{y}_\gamma^n} \phi_q^z(\boldsymbol{\xi}^n) \right) + \left( \frac{\partial \phi_p^\beta}{\partial \mathbf{n}^m}(\boldsymbol{\xi}^m) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{v}_\alpha^m \partial \hat{v}_\gamma^n} \frac{\partial \phi_q^z}{\partial \mathbf{n}^n}(\boldsymbol{\xi}^n) \right)
\end{aligned} \tag{5.23}$$

em que nas expressões (5.22) e (5.23) tem-se  $p, q = 1, 2, \dots, M$ , nó  $\beta$  e direção  $\alpha$  compoendo o grau de liberdade  $i$  e nó  $z$  e direção  $\gamma$  compoendo o grau de liberdade  $j$ . Expressões análogas são obtidas quando não se conhece o potencial  $\mathcal{E}$ .

A utilização direta das expressões (5.21), (5.22) e (5.23), sem a montagem explícita da matriz  $\Psi$ , reduz o número de operações computacionais realizadas. Isso ocorre, pois, como exemplificado na Equação (5.20), a determinação explícita de  $\Psi$  exige o armazenamento de termos nulos. Consequentemente, as operações envolvendo esses termos nulos existirão, o que pode causar perda de desempenho computacional quando se tem um grande número de graus de liberdade embutidos.

## 5.5 Determinação das coordenadas paramétricas

Uma etapa essencial para se realizar o acoplamento é a determinação do vetor de coordenadas paramétricas  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  do elemento de sólido correspondente à posição  $\hat{\mathbf{y}}$  do nó embutido. Para isso, é necessário que a posição calculada a partir do elemento de sólido coincida com a posição do nó embutido, satisfazendo a seguinte expressão:

$$\phi^k(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{y}^k - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \tag{5.24}$$

O Método de Newton-Raphson pode ser aplicado para resolver a Equação (5.24). Assim, para um dado vetor de coordenadas paramétricas  $\boldsymbol{\xi}$ , define-se o resíduo:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}) = \phi^k(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{y}^k - \hat{\mathbf{y}} \tag{5.25}$$

Considerando um vetor de coordenadas paramétricas tentativa  $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr}$ , a linearização do resíduo fornecido pela Equação (5.25) resulta:

$$\mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr} + \Delta\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr}) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\xi}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr}) \cdot \Delta\boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

que, desprezando os termos de alta ordem  $\mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{\xi})$ , resulta no seguinte sistema de equações lineares:

$$\Delta\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{M}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr})\mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr}) \quad (5.27)$$

onde a matriz  $\mathbf{M}$  é fornecida em notação indicial como:

$$M_{ij}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr}) = \frac{\partial r_i}{\partial \xi_j}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr}) = \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_j}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr})y_i^k \quad (5.28)$$

Após resolvido o sistema da Equação (5.27), atualiza-se o vetor de coordenadas paramétricas tentativa  $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr} = \hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr} + \Delta\boldsymbol{\xi}$  e verifica-se o resíduo da Equação (5.25). Enquanto as normas do resíduo  $\mathbf{r}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr})$  e da correção  $\Delta\boldsymbol{\xi}$  forem maiores que uma tolerância pré-estabelecida, repete-se o processo de resolução do sistema linear da Equação (5.27) e correção do vetor tentativa  $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{tr}$ . Caso a tolerância seja atendida, a solução final para  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  é obtida.

Cabe mencionar que a estratégia apresentada nesta seção é eficiente para encontrar as coordenadas paramétricas em elementos pouco distorcidos. Para discretizações com elementos muito distorcidos, a matriz  $\mathbf{M}$  pode se tornar singular, inviabilizando a obtenção da solução. Uma alternativa é o emprego do Método dos Mínimos Quadrados, que se baseia na minimização de uma medida quadrática do erro e gera uma matriz simétrica para a resolução do processo iterativo. Entretanto, como no caso deste trabalho a determinação das coordenadas é realizada apenas sobre a configuração inicial, a distorção dos elementos é controlada pela geração de malha. Assim, a estratégia apresentada nesta seção é suficiente para a determinação precisa das coordenadas paramétricas.

## 5.6 Conexão entre elementos estruturais

Uma aplicação do acoplamento aqui desenvolvido é a possibilidade de modelar ligações entre elementos estruturais sem a necessidade de coincidência de nós na discretização. Conforme apontado por [Kwasniewski \(2010\)](#), a modelagem das ligações é uma das principais dificuldades na modelagem de uma edificação para análise de colapso progressivo. Nesse cenário, a busca por modelos de ligação simplificados e robustos é de grande interesse nessa linha de pesquisa.

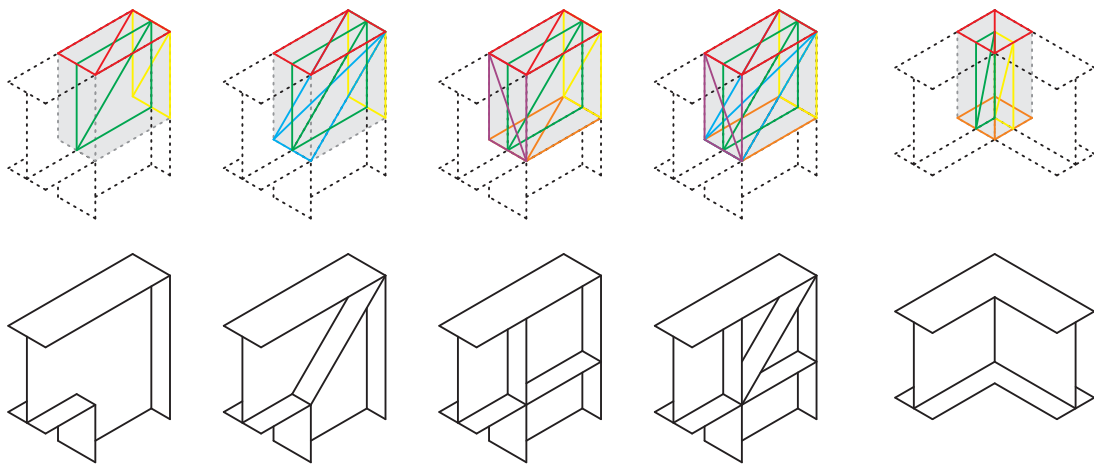
A estratégia de acoplamento aqui proposta é aplicável diretamente para a junção de elementos estruturais. Entretanto, a rigidez a ser adotada para o elemento de sólido não é conhecida a priori. Um valor elevado de rigidez pode ser suficiente para a modelagem de



ligações rígidas. No entanto, para uma ligação real flexível, uma definição adequada do valor da rigidez é requerida.

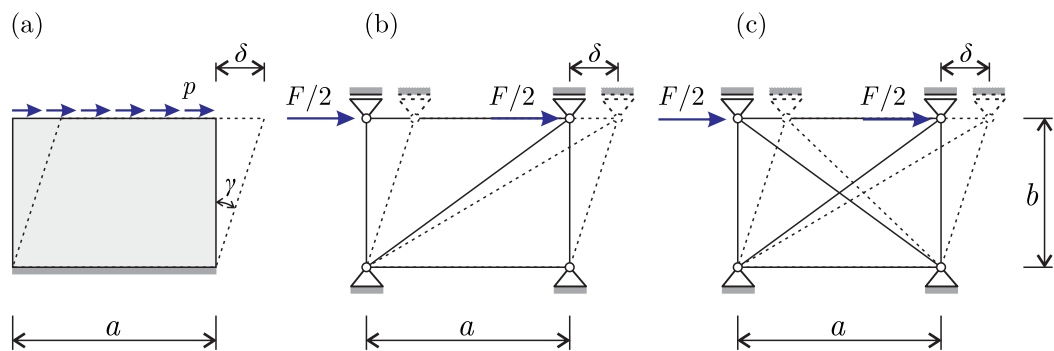
A ideia aqui proposta para mitigar este problema consiste em anular a rigidez do elemento de sólido e introduzir rigidez em planos seletivos por meio de elementos de treliça. Alguns exemplos de conexão realizada com o esquema proposto estão apresentados na Figura 30. Dessa forma, os valores de rigidez para os elementos de treliça podem ser determinados por equivalência com um elemento plano, conforme exemplificado na Figura 31. Na referida figura, a força distribuída  $p$  possui resultante de intensidade  $F$ .

Figura 30 – Esquemas de treliça para simulação da conexão entre elementos estruturais



Fonte: Autor.

Figura 31 – Esquemas de treliça para determinação de rigidez equivalente



Fonte: Autor.

A rigidez equivalente para cada elemento de treliça é determinada de modo que o esquema de treliça gere o mesmo deslocamento  $\delta$  do elemento de chapa. Para o elemento de chapa, tem-se  $p = G\gamma$ , sendo  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $\delta = \gamma b$ . Sabendo que  $F = ah_0p$ , sendo  $h_0$  a espessura da chapa, o deslocamento  $\delta$  é expresso como:

$$\delta = \frac{Fb}{Gah_0} \quad (5.29)$$

O esquema de treliça (b) na [Figura 31](#) gera, a partir de uma análise linear, um deslocamento  $\delta$  com a seguinte expressão:

$$\delta = \frac{F(a^2 + b^2)^{3/2}}{EA_0 a^2} \quad (5.30)$$

Igualando-se as Equações (5.29) e (5.30) obtém-se a seguinte rigidez equivalente:

$$EA_0 = \frac{Gh_0}{ab}(a^2 + b^2)^{3/2} \quad (5.31)$$

Analogamente, para o esquema de treliça (c) da [Figura 31](#), o deslocamento  $\delta$  é expresso como:

$$\delta = \frac{F(a^2 + b^2)^{3/2}}{2EA_0 a^2} \quad (5.32)$$

Portanto, a partir das Equações (5.29) e (5.32), a rigidez equivalente para o esquema (c) da [Figura 31](#) é expressa como:

$$EA_0 = \frac{Gh_0}{2ab}(a^2 + b^2)^{3/2} \quad (5.33)$$

Análises semelhantes podem ser realizadas para outras geometrias de ligação ou outros esquemas de treliça. Para situações mais gerais, uma análise linear em elementos finitos pode ser realizada como pré-processamento, possibilitando a determinação automática da rigidez equivalente para os elementos de treliça.

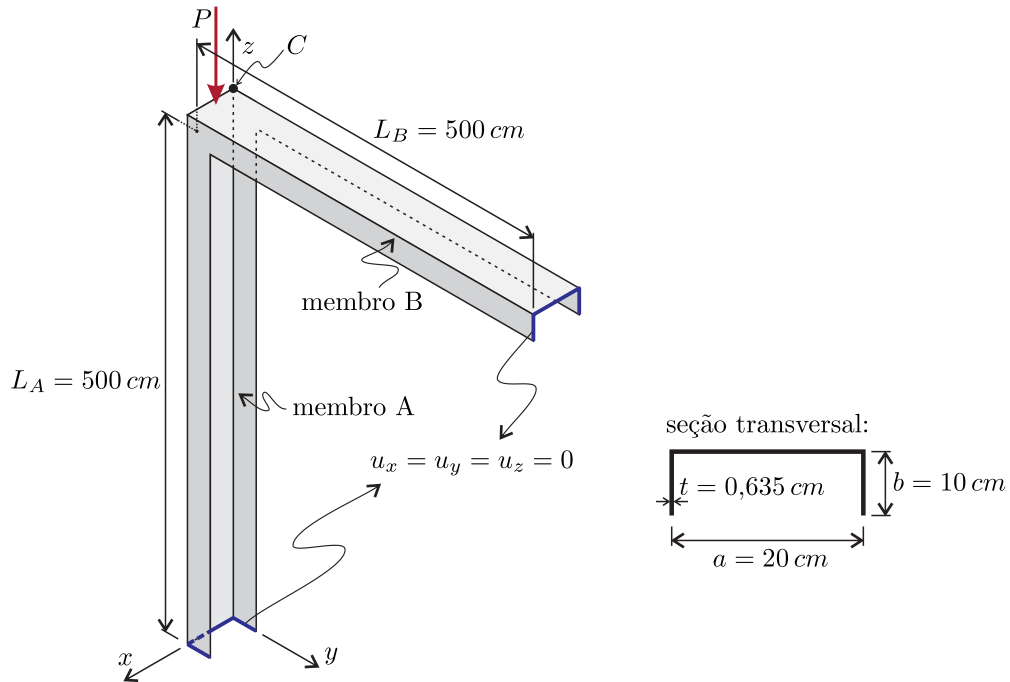
## 5.7 Exemplos numéricos

A seguir são apresentados três exemplos numéricos com o intuito de validar a proposta de conexão entre elementos finitos e demonstrar a aplicabilidade na modelagem de conexões entre membros estruturais formados de perfis de parede fina.

### 5.7.1 Pórtico plano em “L” - seção U

Neste primeiro exemplo valida-se a obtenção de carga crítica de um pórtico em “L” formado por perfis de parede fina com os resultados obtidos por [Basaglia, Camotim e Silvestre \(2008\)](#). A geometria e as condições de contorno estão apresentadas na [Figura 32](#). Os comprimentos  $L_A$  e  $L_B$  medem a distância de cada respectiva extremidade apoiada ao centroide das seções dos membros  $B$  e  $A$ , respectivamente. A força concentrada  $P$  atua sobre o centroide da seção transversal do membro  $A$  e  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$  indicam deslocamentos ao longo das direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. O material empregado possui módulo de elasticidade  $E = 205 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

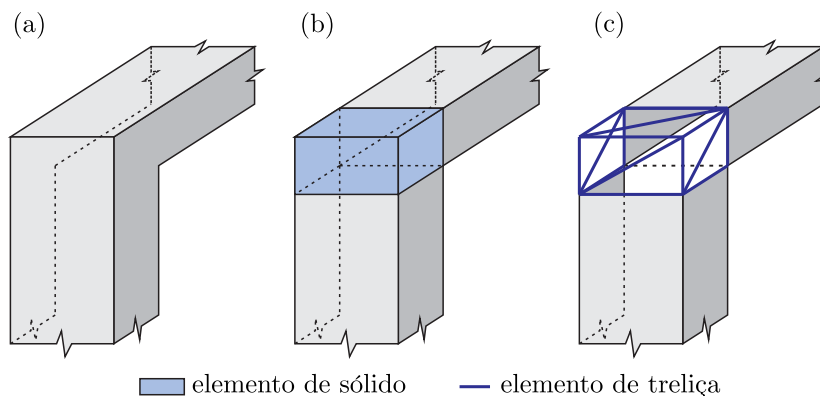
Figura 32 – Geometria, carregamento e condições de apoio para pórtico plano em “L” com seção transversal em U



Fonte: Autor.

Três casos são modelados neste trabalho. No Caso I modela-se a ligação entre os dois trechos do pórtico com elementos de casca, [Figura 33\(a\)](#), semelhante ao que foi realizado por [Basaglia, Camotim e Silvestre \(2008\)](#) no ANSYS. No Caso II a ligação é modelada por meio do embutimento dos nós de extremidade de cada perfil em um elemento hexaédrico de 8 nós (aproximação linear) que possui o mesmo material do perfil, [Figura 33\(b\)](#), gerando assim uma ligação mais rígida que a anterior. Por fim, no Caso III apresenta-se a proposta simplificadora, que consiste em anular a rigidez do elemento hexaédrico e contraventá-lo com elementos de treliça nos planos onde estariam presentes os elementos de casca, [Figura 33\(c\)](#).

Figura 33 – Modelos adotados para a ligação: (a) Caso I, (b) Caso II e (c) Caso III



Fonte: Autor.

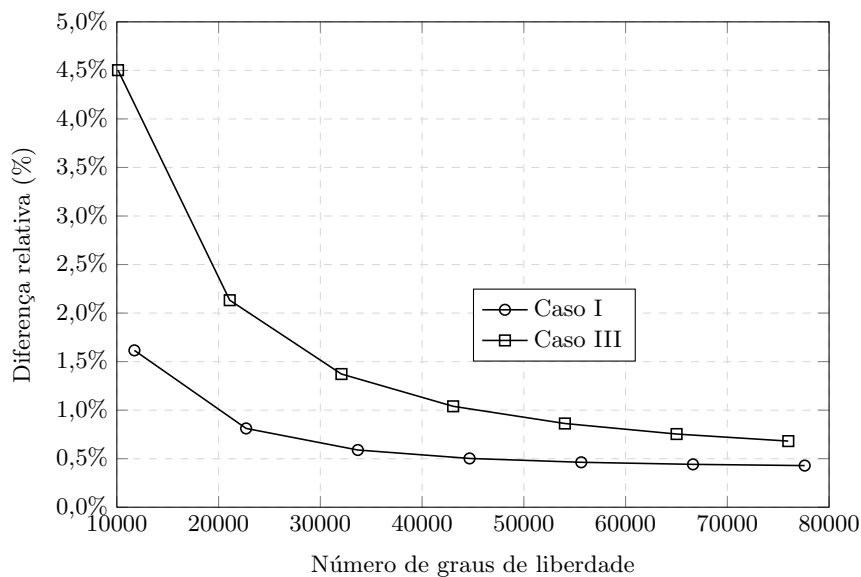
A rigidez para cada elemento de treliça é determinada a partir da Equação (5.31)

considerando a rigidez ao cisalhamento de cada plano. Para os elementos que estão presentes em dois planos distintos, é atribuída a média entre as rigidezes. Espera-se, neste Caso III, resultados semelhantes ao Caso I, porém com um modelo de ligação mais simplificado.

Nos casos II e III foi realizado o embutimento apenas das posições nodais, permanecendo os vetores generalizados livres. No Caso III, a presença do elemento hexaédrico com rigidez nula garante que os nós da extremidade de cada perfil, mesmo os que não são coincidentes com os nós da treliça, se desloquem apenas ao longo da reta definida pela aresta correspondente do elemento sólido.

As discretizações adotadas para os casos I, II e III resultam em 77605, 75994 e 75994 graus de liberdade, respectivamente. Os casos II e III possuem o mesmo número de graus de liberdade, pois os nós da treliça são coincidentes com os nós do sólido. Essas discretizações foram determinadas com base na análise de convergência em carga crítica apresentada na [Figura 34](#), onde as diferenças relativas foram tomadas com base na solução do ANSYS ([BASAGLIA; CAMOTIM; SILVESTRE, 2008](#)), apresentada na [Tabela 7](#).

Figura 34 – Análise de convergência em carga crítica para os casos I e III relativa ao ANSYS



Fonte: Autor.

A carga crítica para cada um dos três casos aqui modelados, juntamente com os resultados obtidos por [Basaglia, Camotim e Silvestre \(2008\)](#), estão apresentados na [Tabela 7](#). Na [Figura 35](#) estão apresentados os modos críticos associados a essas cargas críticas.

É avaliado também o efeito da ligação proposta no comportamento não-linear da estrutura. Para isso, considera-se o Caso I como referência e determina-se uma trajetória de equilíbrio por meio da estratégia Arc-Length. Uma força de perturbação é imposta

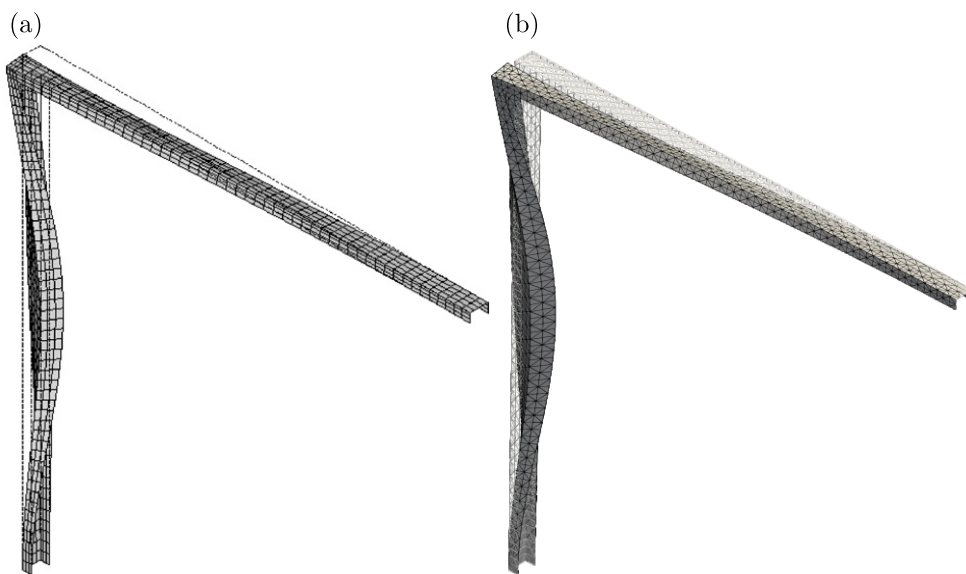
nas proximidades do ponto de bifurcação e a trajetória de equilíbrio pós-crítica é obtida. Realiza-se o mesmo procedimento para o Caso III. Ambas as trajetórias de equilíbrio estão apresentadas na [Figura 36](#).

Tabela 7 – Carga crítica (em  $kN$ ) para o pórtico em “L” com seção U

Referência		Presente trabalho		
GBT	ANSYS	Caso I	Caso II	Caso III
521,35	520,38	522,61	577,74	523,93

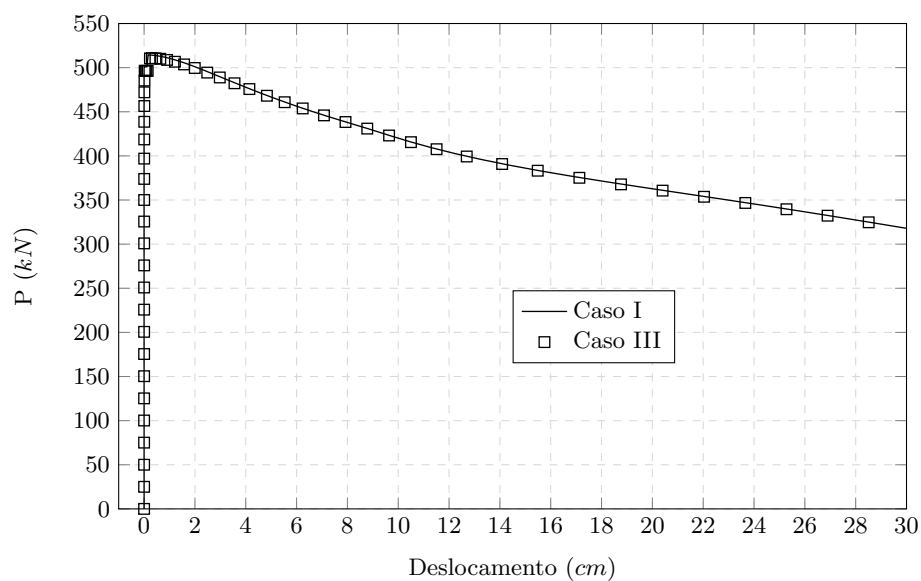
Fonte: Autor.

Figura 35 – Primeiro modo de instabilidade para pórtico plano em “L”: (a) ANSYS, (b) Caso I



Fonte: Autor.

Figura 36 – Trajetória de equilíbrio do ponto  $C$  na direção  $x$



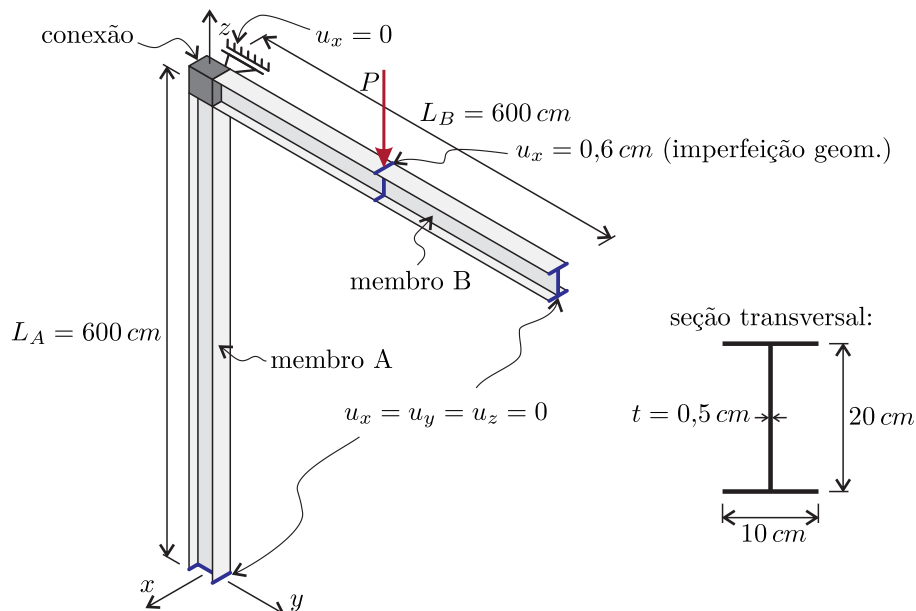
Fonte: Autor.

Observa-se que as trajetórias de equilíbrio apresentadas na [Figura 36](#) são praticamente coincidentes, indicando que o modelo de ligação proposto possui boa adequação também para avaliação de equilíbrio pós-crítico. As cargas críticas obtidas por meio das trajetórias de equilíbrio são aproximadamente  $P_{cr} = 514,44 \text{ kN}$  para o Caso I e  $P_{cr} = 510,65 \text{ kN}$  para o Caso III, resultando numa diferença relativa de apenas 0,7% entre esses valores.

### 5.7.2 Pórtico plano em “L” - seção I

Neste segundo exemplo é apresentado um pórtico em “L” composto de perfis de seção I analisado por [Basaglia, Camotim e Silvestre \(2012\)](#). A geometria, o carregamento e as condições de apoio estão apresentadas na [Figura 37](#). A força  $P$  está aplicada no ponto de coordenadas  $(0, L_B/2, L_A)$ , correspondente ao meio do vão da viga. A notação para deslocamentos é a mesma utilizada no exemplo anterior. O material empregado possui módulo de elasticidade  $E = 205 \text{ GPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Destaca-se que o deslocamento prescrito  $u_x = 0,6 \text{ cm}$  na seção central do membro  $B$  atua como imperfeição geométrica, sendo imposta sobre a configuração inicial da estrutura.

Figura 37 – Geometria, carregamento e condições de apoio para pórtico plano em “L” com seção transversal em I



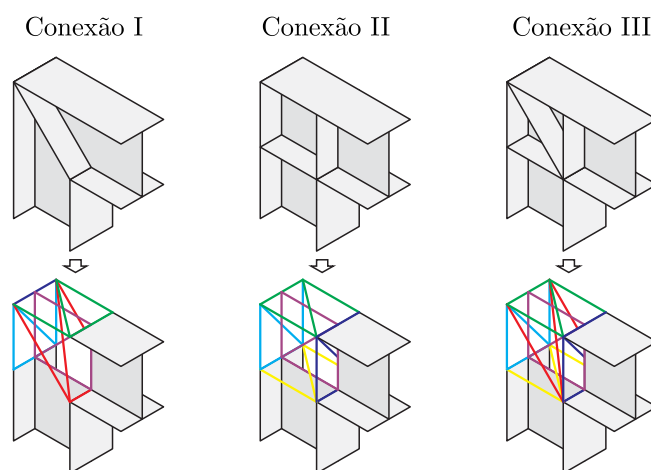
Fonte: Autor.

Três geometrias de ligação são analisadas por [Basaglia, Camotim e Silvestre \(2012\)](#). Na [Figura 38](#) estão apresentadas as geometrias de cada ligação juntamente com a modelagem realizada no presente trabalho. A modelagem corresponde à introdução de um elemento hexaédrico com rigidez nula preenchendo o espaço de ligação. Os nós de extremidade dos membros  $A$  e  $B$  que chegam na ligação são embutidos neste elemento hexaédrico. A rigidez é então introduzida por meio da inserção de elementos de treliça segundo cada

plano definido pela geometria da ligação, sendo os valores de rigidez definidos pela Equação (5.31).

A análise de convergência produz resultados semelhantes aos obtidos no exemplo anterior. Por melhor precisão, adota-se a discretização mais refinada, que resulta em 74900 graus de liberdade.

Figura 38 – Geometria e modelagem da ligação



Fonte: Autor.

Os valores correspondentes à carga crítica para cada um dos modelos de ligação estão apresentados na Tabela 8. As siglas B-FE e S-FE denotam elemento finito de viga e de casca, respectivamente, utilizados por Basaglia, Camotim e Silvestre (2012). A diferença relativa apresentada na tabela é medida com relação aos valores referentes ao S-FE. Valores mais elevados de diferença relativa se devem principalmente devido ao esquema simplificado de modelagem da ligação.

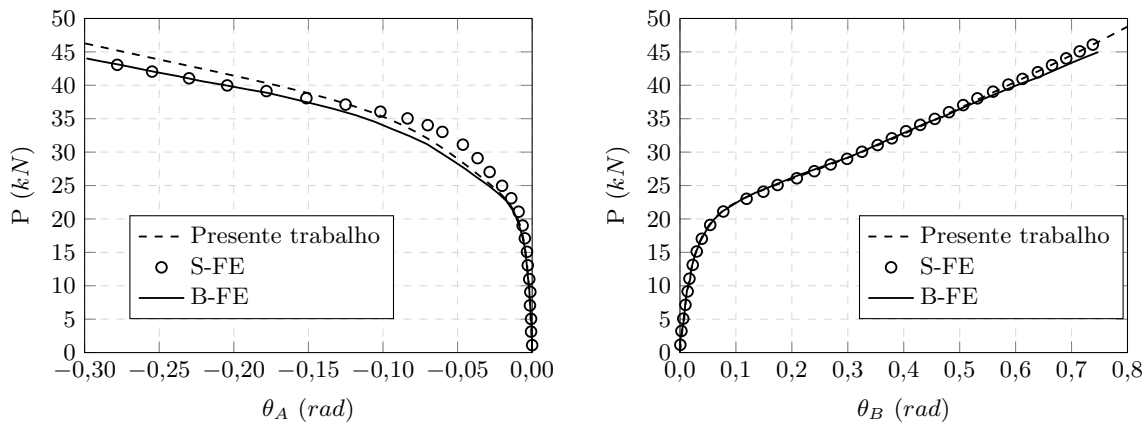
Tabela 8 – Carga crítica (em  $kN$ ) para o pórtico em “L” com seção I

Ligação	Referência		Presente trabalho	Dif. (%)
	B-FE	S-FE		
I	25,2	24,8	25,18	1,53
II	24,7	24,5	23,76	3,02
III	27,3	26,6	27,01	1,54

Fonte: Autor.

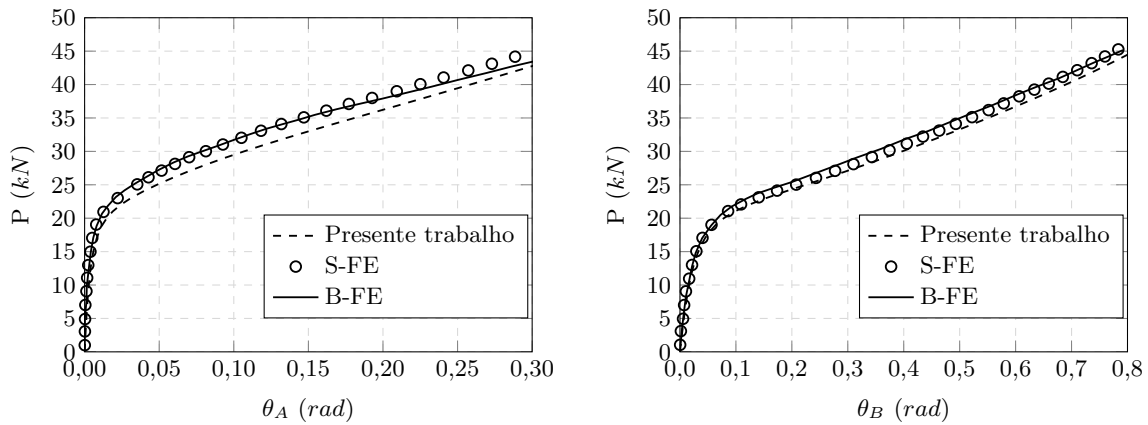
São obtidas também trajetórias de equilíbrio  $P$  vs.  $\theta_A$ , sendo  $\theta_A$  a rotação da seção localizada no ponto médio do membro  $A$ , e  $P$  vs.  $\theta_B$ , em que  $\theta_B$  é a rotação da seção localizada no ponto médio do membro  $B$ . No presente trabalho, essas rotações foram determinadas com base no ângulo entre os vetores generalizados nas configurações inicial e atual dos nós situados sobre o centroide de cada respectiva seção transversal. As trajetórias obtidas na presença das ligações I, II e III estão apresentadas nas Figuras 39, 40 e 41, respectivamente.

Figura 39 – Trajetórias de equilíbrio para o modelo com ligação I



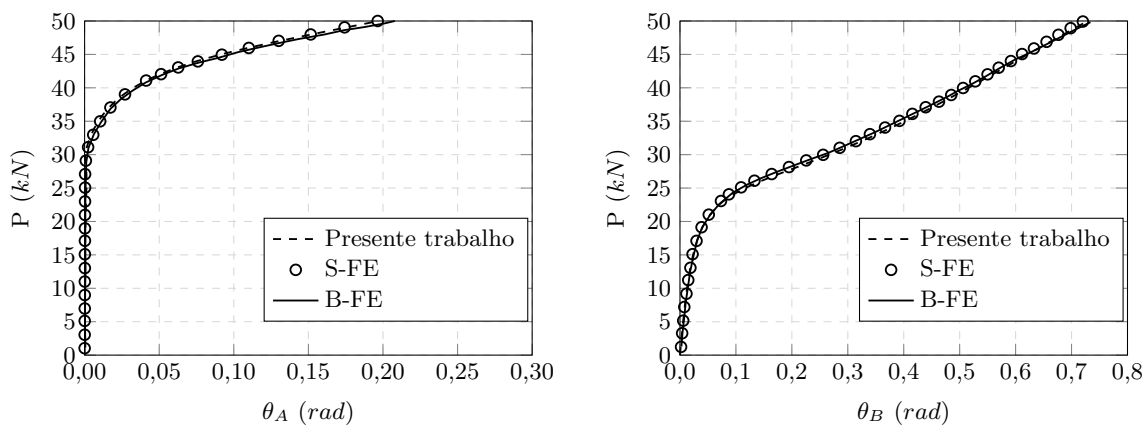
Fonte: Autor.

Figura 40 – Trajetórias de equilíbrio para o modelo com ligação II



Fonte: Autor.

Figura 41 – Trajetórias de equilíbrio para o modelo com ligação III



Fonte: Autor.

Observa-se, em geral, boa aderência dos resultados aqui obtidos com os apresentados por [Basaglia, Camotim e Silvestre \(2012\)](#). O esquema com a ligação II, apesar de apresentar maior diferença relativa em termos de carga crítica, apresentou trajetórias de equilíbrio

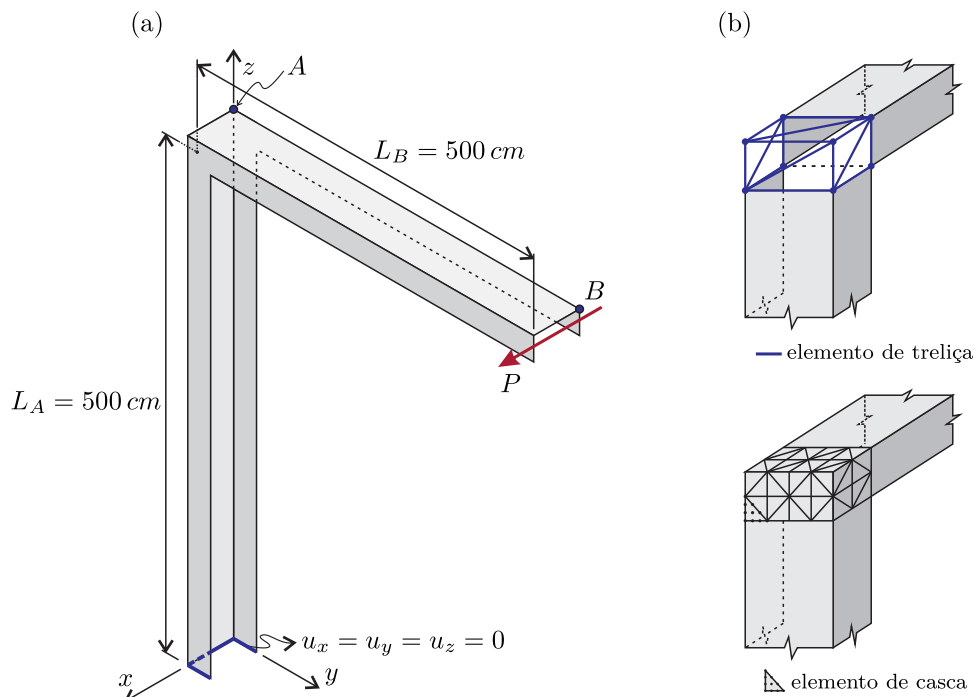


bem próximas as de referência. Já a utilização da ligação III, que apresenta maior rigidez, produziu trajetórias de equilíbrio visualmente coincidentes com as demais apresentadas.

### 5.7.3 Pórtico em “L” com torção dominante

Neste exemplo, a mesma geometria e parâmetros físicos do exemplo da [subseção 5.7.1](#) são usados para demonstrar a capacidade do elemento de conexão proposto em transferir adequadamente os esforços internos em um problema com torção dominante. O pórtico é fixo na extremidade  $z = 0$  e é submetido a uma força horizontal  $P = (4 \cdot 10^{-3}\lambda) kN$ , sendo  $\lambda$  o fator de carga, conforme [Figura 42\(a\)](#). A força  $P$  atua na direção do centroide da seção transversal. A ligação é modelada com o elemento de conexão e com elementos de casca, sendo esses esquemas mostrados na [Figura 42\(b\)](#). As rigidezes para os elementos de treliça contidos no elemento de conexão foram calculadas via Equação (5.31).

Figura 42 – Pórtico com torção dominante: (a) esquema estático e (b) conexões



Fonte: Autor.

As primeiras cinco cargas críticas estão mostradas na [Tabela 9](#) para ambos os modelos de conexão, sendo a ligação com elemento de casca tomada como referência. Nota-se que as diferenças relativas entre os valores foram ínfimas, mostrando boa adequação do esquema de conexão proposto para análises lineares de estabilidade.

Tabela 9 – Cinco primeiras cargas críticas ( $\lambda$ ) para o pórtico em “L” com torção dominante

Modo	Casca	Elemento de Conexão	Dif. (%)
1	156,12	156,79	0,42
2	189,47	190,64	0,62
3	215,08	215,64	0,26
4	241,57	242,24	0,28
5	265,28	265,71	0,16

Fonte: Autor.

Na [Figura 43](#) são apresentados os três primeiros modos para o caso que contém a conexão proposta. Observa-se que todos os modos correspondem a instabilidade local.

Figura 43 – Primeiros três modos de instabilidade para o problema de torção dominante

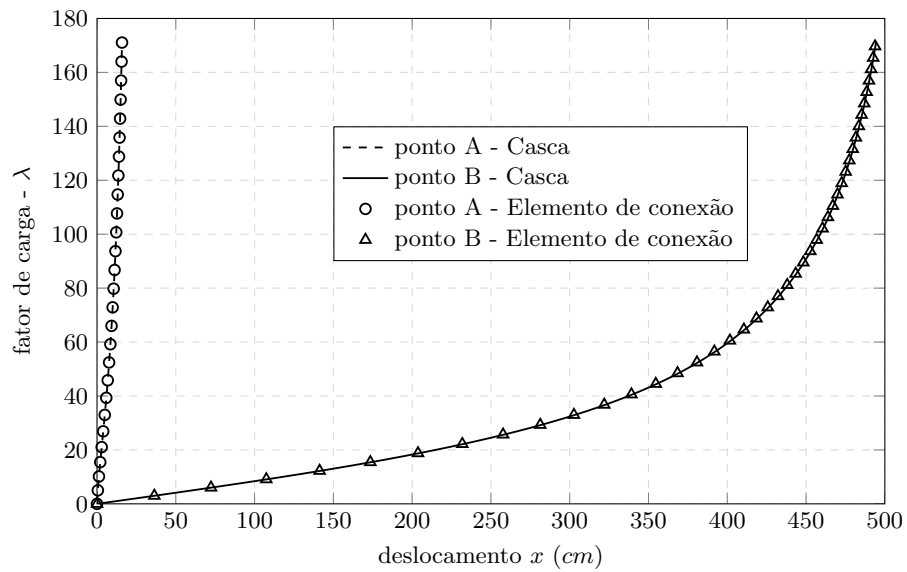


Fonte: Autor.

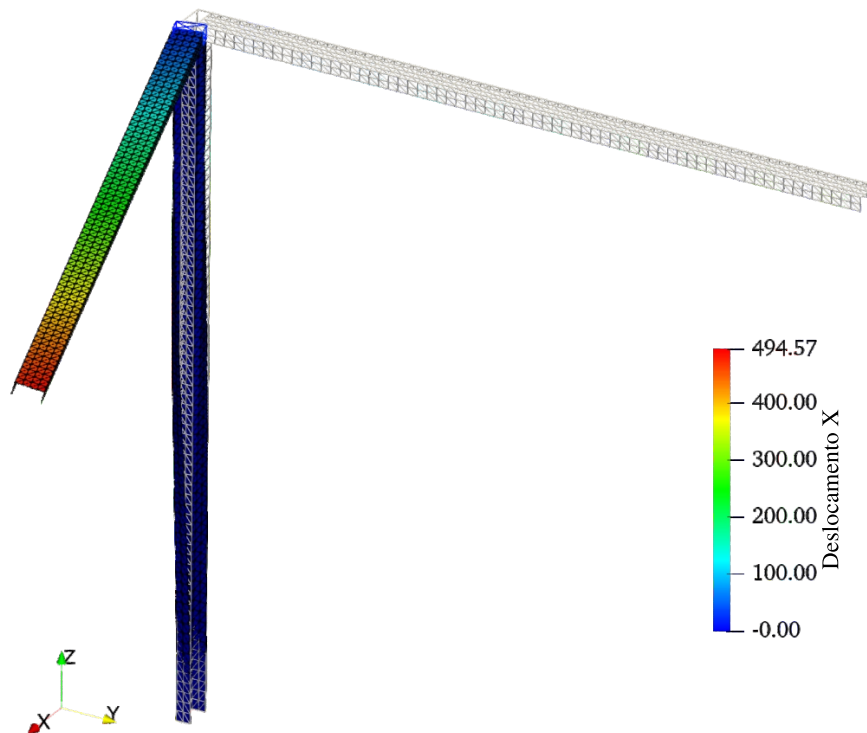
Na [Figura 44](#) são apresentadas as trajetórias de equilíbrio dos pontos A e B da [Figura 42\(a\)](#). Essas trajetórias foram obtidas via estratégia do comprimento de arco juntamente com análise de autovalores. A análise de autovalor permitiu concluir que não houve perda de estabilidade durante a análise, pelo contrário, observou-se ganho de rigidez. Observa-se que, para o nível da menor carga crítica da [Tabela 9](#), a estrutura desenvolve deslocamentos da mesma ordem do comprimento das peças, o que explica o fato de as cargas críticas medidas em pequenos deslocamentos não se confirmarem. É importante ressaltar que a análise de autovalor deve ser realizada para se ter certeza de que nenhuma perda de estabilidade ocorreu no processo.

Por fim, na [Figura 45](#) é mostrada a configuração da estrutura para o último fator de carga da análise, onde fica evidente a ocorrência de grandes deslocamentos.

Figura 44 – Trajetórias de equilíbrio para os pontos A e B (vide Figura 42(a))



Fonte: Autor.

Figura 45 – Configuração final do pórtico para fator de carga  $\lambda = 171,07$ 

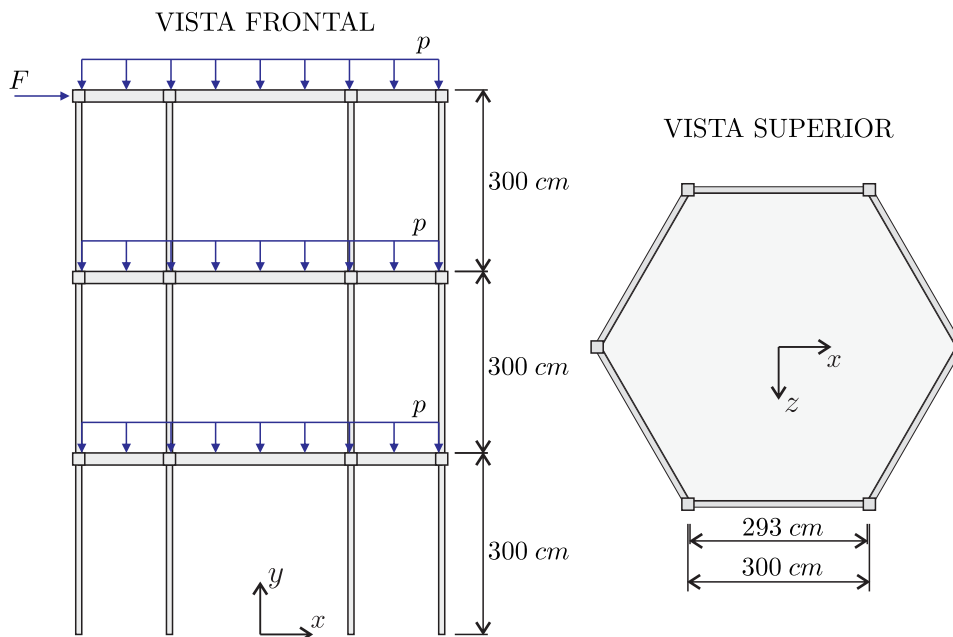
Fonte: Autor.

#### 5.7.4 Edifício de três pavimentos

Neste exemplo é analisada uma edificação de três pavimentos, apresentada na Figura 46. Os pilares da base possuem comprimento de 290 *cm* (da base até o centro da ligação). Os demais pilares possuem comprimento de 300 *cm* (de centro a centro de

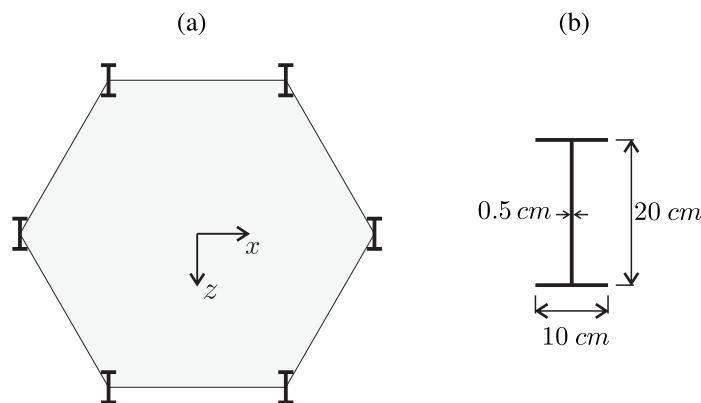
ligação). As vigas possuem comprimento de  $300\text{ cm}$ . Os pilares estão orientados conforme o apresentado na Figura 47(a) e a seção transversal adotada para pilares e vigas está representada na Figura 47(b). Os dispositivos de ligação compreendem as caixas cúbicas de  $20\text{ cm}$  de lado para conexão viga-pilar e as “tábuas” de dimensões  $300\text{ cm} \times 15\text{ cm} \times 5\text{ cm}$  para conexão viga-laje. As lajes são hexágonos regulares e possuem  $293\text{ cm}$  de lado e  $15\text{ cm}$  de espessura. O material adotado para as lajes foi concreto:  $E = 21\text{ GPa}$  e  $\nu = 0,2$ . Para vigas e pilares adotou-se aço:  $E = 210\text{ GPa}$  e  $\nu = 0,3$ .

Figura 46 – Edificação de três pavimentos com planta hexagonal



Fonte: Autor.

Figura 47 – Informações referentes à (a) orientação dos pilares e à (b) seção transversal dos pilares e das vigas



Fonte: Autor.

A estrutura possui apoios restringindo os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  na base dos pilares inferiores ( $y = 0$ ). O carregamento atuante corresponde a uma força distribuída  $p = 1,0 \cdot \lambda\text{ kN/m}^2$  atuando sobre as três lajes que compõem a estrutura, sendo  $\lambda$  o fator de carga. Inicialmente é imposto  $F = 0,0$ .

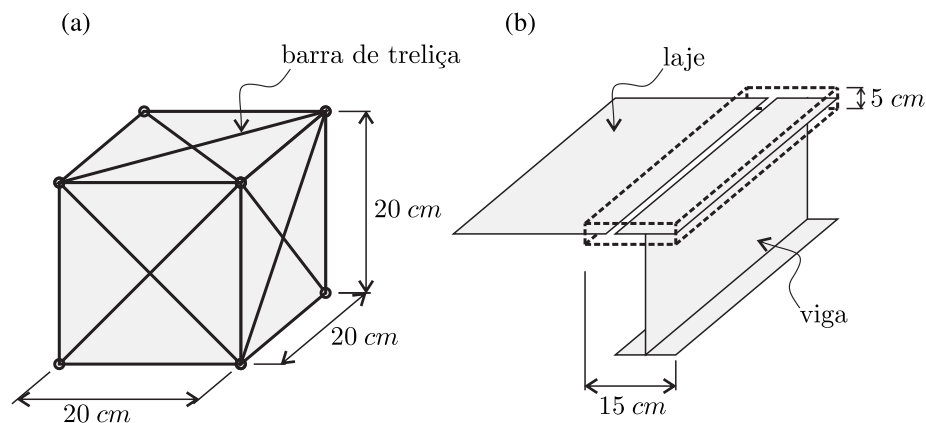
O dispositivo de ligação no encontro viga-pilar corresponde a um elemento hexaédrico com aproximação linear e rigidez nula. A rigidez da ligação é inserida por meio de elementos de treliça, sendo o valor da rigidez de cada barra calculado pela Equação (5.33). São embutidos no elemento hexaédrico as posições dos nós de extremidade das vigas e dos pilares que chegam na ligação. Os vetores generalizados são mantidos livres. A representação desse elemento de ligação está na Figura 48(a).

No encontro viga-laje, o dispositivo de ligação corresponde a um sólido discretizado em 5 elementos com aproximação cúbica na direção longitudinal da viga e aproximação linear nas demais direções, sendo ilustrado na Figura 48(b). São embutidas no sólido as posições de todos os nós presentes na aba superior da viga. São embutidos também as posições e os vetores generalizados dos nós da laje situados no interior do sólido. Nesse último caso, os vetores generalizados dos nós da laje são também embutidos de modo a garantir a continuidade de rigidez à flexão da laje para o sólido de conexão. O módulo de elasticidade do sólido é definido por meio de equivalência com a rigidez da laje, resultando em:

$$E = E_S \left( \frac{h_S}{h} \right)^3 \quad (5.34)$$

sendo  $E_S$  e  $h_S$  o módulo de elasticidade e a espessura da laje, respectivamente, e  $h$  é a espessura do sólido de ligação.

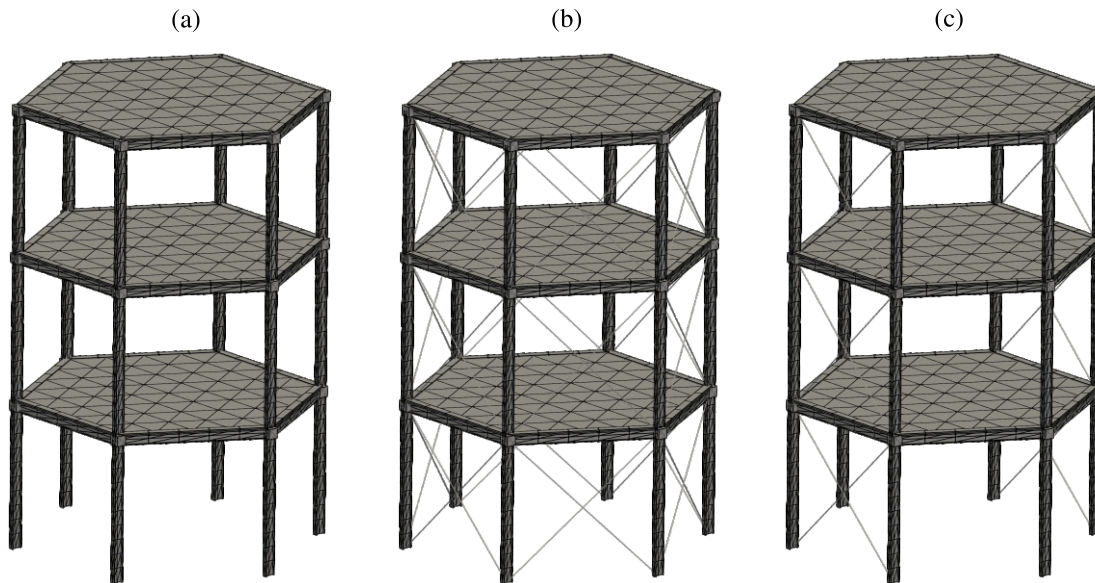
Figura 48 – Dispositivos de conexão: (a) elemento hexaédrico com aproximação linear para conexão viga-pilar, (b) sólido para conexão viga-laje (tracejado)



Fonte: Autor.

As vigas, os pilares e as lajes são discretizados com elementos de casca. A malha adotada, apresentada na Figura 49(a), resulta no total de 122673 graus de liberdade. Além do modelo estrutural descrito, são analisadas também situações com contraventamento total e contraventamento seletivo. No contraventamento total são inseridos elementos de treliça com produto de rigidez  $EA_0 = 21000 \text{ kN}$  em todas as faces laterais da estrutura, Figura 49(b). No contraventamento seletivo, são inseridos os elementos de treliça apenas nas faces associadas às direções de menor momento de inércia dos pilares, Figura 49(c).

Figura 49 – Discretizações para as três situações analisadas: (a) sem contraventamento, (b) contraventamento total e (c) contraventamento seletivo



Fonte: Autor.

As quatro primeiras cargas críticas para cada caso de contraventamento analisado estão apresentadas na [Tabela 10](#). Os três primeiros modos do caso sem contraventamento correspondem a modos de instabilidade globais. Esses modos não estão presentes nos demais casos de contraventamento, conforme esperado. Na [Figura 50](#) são apresentados os modos de instabilidade referentes à primeira carga crítica para cada um dos casos analisados.

Figura 50 – Primeiro modo de instabilidade para cada caso analisado



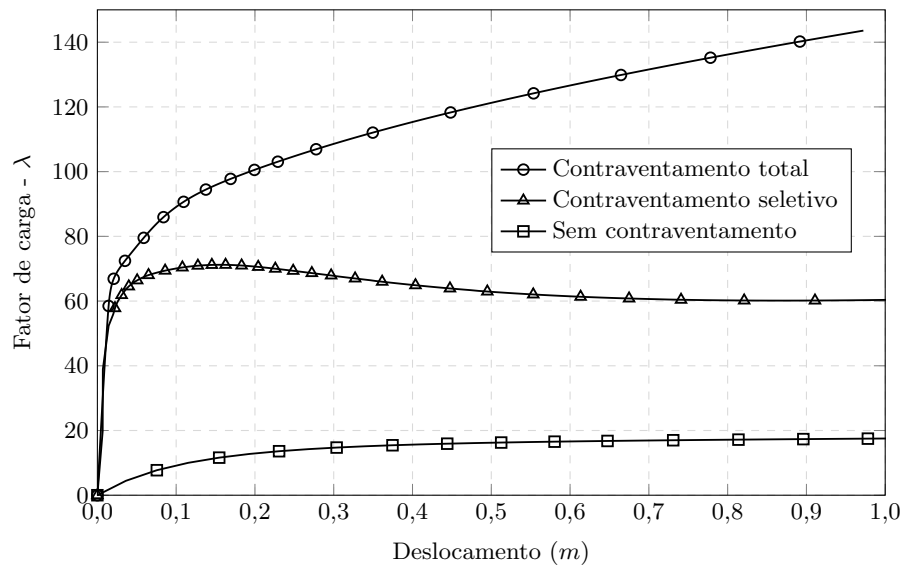
Fonte: Autor.

Para a determinação de trajetórias de equilíbrio, uma força concentrada adicional  $F = 1,0 \cdot \lambda \text{ kN}$  foi considerada. Essa intensidade é aproximadamente 1.5% da carga vertical total atuante. As trajetórias de equilíbrio obtidas correspondem ao deslocamento na direção  $x$  do ponto de aplicação da força  $F$  e estão apresentadas na [Figura 51](#).

Tabela 10 – Fatores de carga crítica ( $\lambda$ ) para os casos de contraventamento analisados

Modo	Contraventamento		
	Ausente	Seletivo	Total
1	18,09	66,09	67,90
2	24,93	66,15	67,93
3	49,03	66,50	68,27
4	65,25	66,52	68,30

Fonte: Autor.

Figura 51 – Trajetórias de equilíbrio do ponto de aplicação da força concentrada  $F$ 

Fonte: Autor.

Por fim, são apresentadas na [Figura 52](#) as configurações deformadas ao final da análise. Em resumo, pode-se afirmar que os elementos de conexão aqui desenvolvidos podem ser inseridos em modelos numéricos mais complexos, produzindo resultados dentro do esperado. Além disso, a introdução desses elementos elimina a necessidade de compatibilizar malhas na região da conexão, facilitando assim a construção do modelo numérico.

### 5.7.5 Pórtico tridimensional

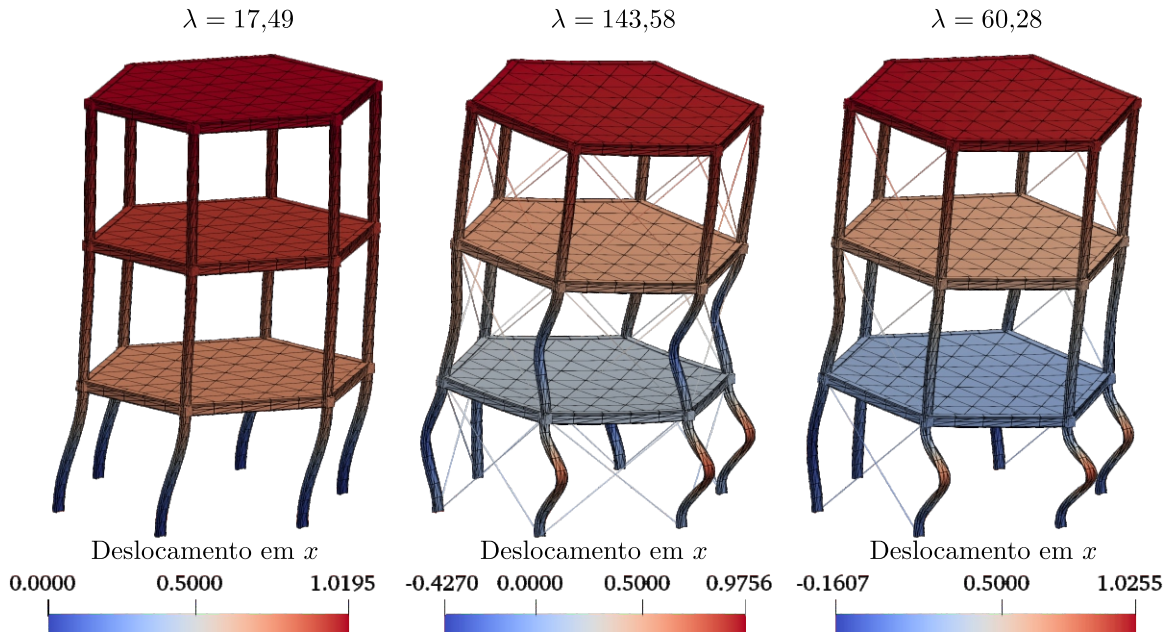
Neste exemplo, outra estrutura tridimensional é analisada. De modo a verificar o aspecto tridimensional da estrutura com conexões, não são consideradas lajes. Este exemplo é inspirado na análise de instabilidade de estrutura tridimensional resolvida por [Basaglia, Camotim e Silvestre \(2012\)](#). Esta análise de instabilidade, usando 300 elementos finitos para vigas e colunas e 312 elementos finitos para viga transversal (total de 96213 graus de liberdade), é comparada com os resultados obtidos por [Basaglia, Camotim e Silvestre \(2012\)](#), que utiliza 20250 graus de liberdade.

As condições de deslocamento fornecidas na [Figura 53](#) são:  $u_x = u_y = u_z = 0$  na base das colunas ( $z = 0$ ),  $u_x = u_y = 0$  no centroide das conexões viga-coluna e  $u_y = 0$



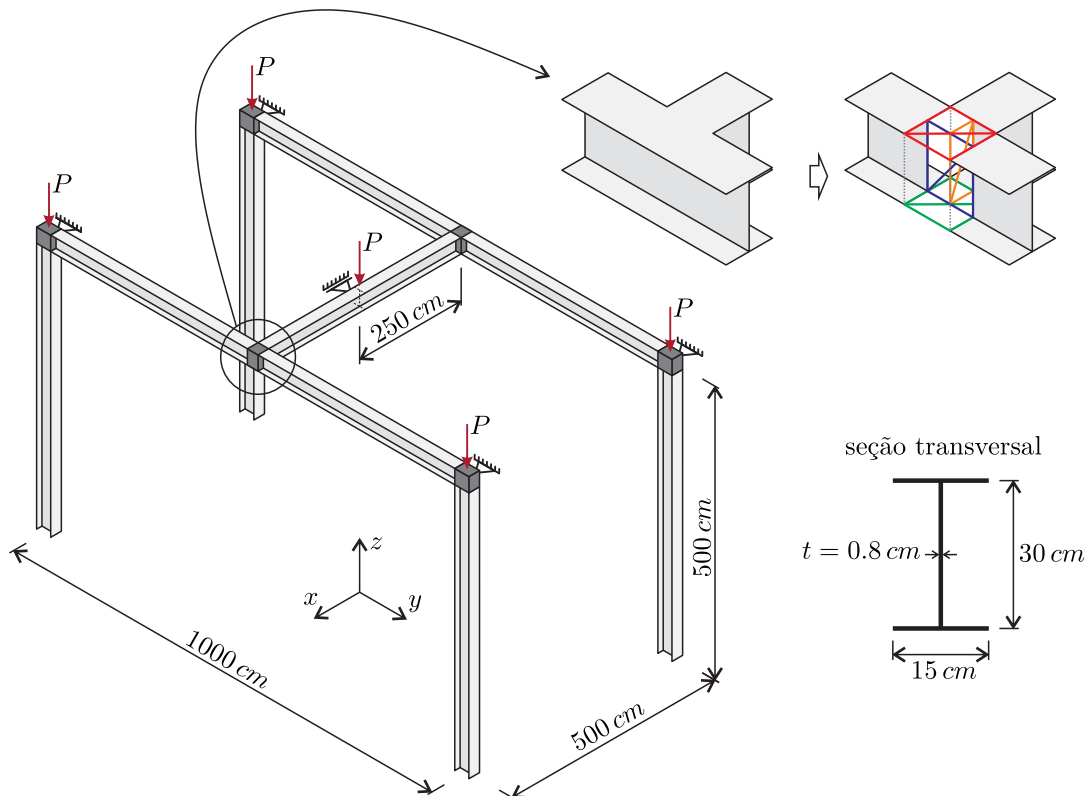
no ponto central da estrutura ( $x = 0, y = 0, z = 500 \text{ cm}$ ). Cinco forças concentradas são aplicadas no centroide das seções transversais, ver Figura 53. A conexão viga-viga é representada na Figura 53. As três conexões viga-pilar adotadas são as mesmas do exemplo da subseção 5.7.2, representadas na Figura 38.

Figura 52 – Configuração deformada da estrutura ao fim da análise



Fonte: Autor.

Figura 53 – Geometria, condições de contorno e conexão viga-viga para o pórtico tridimensional



Fonte: Autor.



Na Tabela 11, utilizam-se os valores da coluna S-FE, obtidos por Basaglia, Camotim e Silvestre (2012), como referência para o cálculo das diferenças relativas.

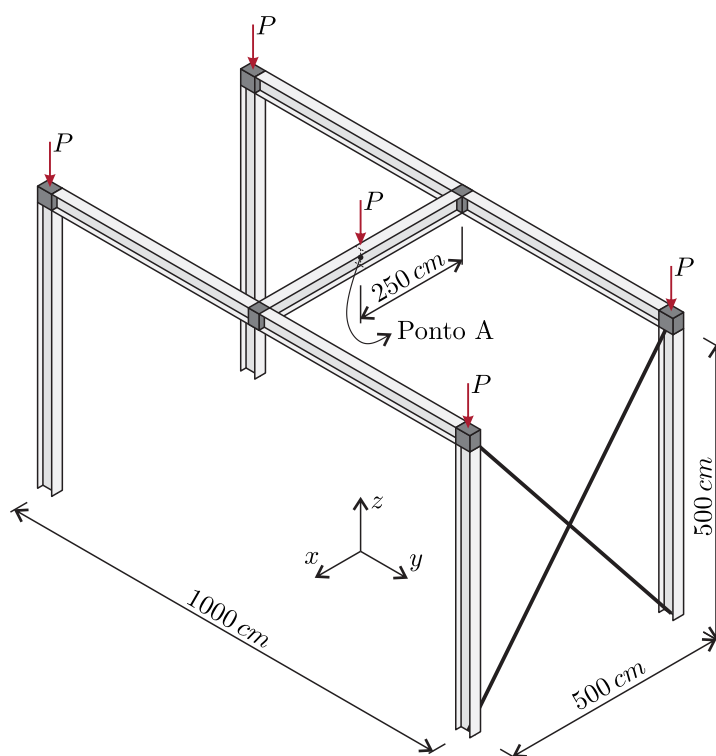
Tabela 11 – Carga crítica (em  $kN$ ) para o pórtico tridimensional

Conexão	Referência		Presente trabalho	Dif. (%)
	B-FE	S-FE		
I	325,45	327,99	332,65	1,42
II	307,88	306,47	291,63	4,84
III	350,00	339,20	351,48	3,62

Fonte: Autor.

Pode-se notar que as condições de contorno propostas por Basaglia, Camotim e Silvestre (2012) restringem os movimentos globais da estrutura e são utilizadas para avaliar a transmissão de empenamento pelas conexões. Depois de verificar a convergência da discretização a partir da boa concordância dos resultados na Tabela 11, foi proposta uma estrutura mais flexível (chamada de pórtico tridimensional modificado), ver Figura 54, para obtenção das trajetórias de equilíbrio em grandes deslocamentos. Na nova estrutura, foram mantidas as restrições da base das colunas e liberadas todas as outras. Também foi introduzido um contraventamento com barras de rigidez  $EA_0 = 20500 kN$  em um lado da estrutura, conforme Figura 54.

Figura 54 – Pórtico modificado proposto para analisar o comportamento no regime de grandes deslocamentos



Fonte: Autor.

Para o pórtico tridimensional modificado, foram determinadas as cargas críticas de instabilidade, [Tabela 12](#), que são consideravelmente menores que as obtidas para o pórtico inicial, [Tabela 11](#).

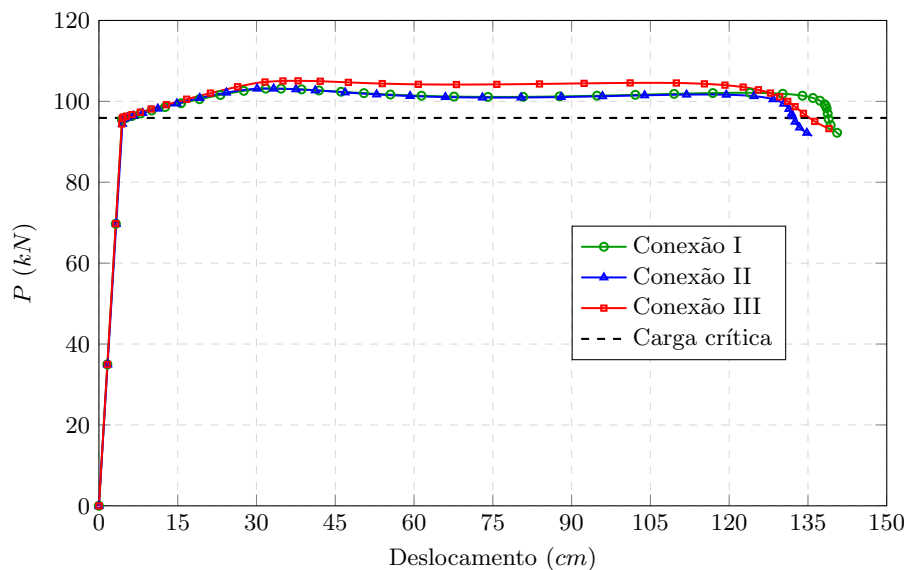
Tabela 12 – Cargas críticas ( $kN$ ) para o pórtico tridimensional modificado

Modo	Conexão I	Conexão II	Conexão III
1	95,71	95,83	96,16
2	117,43	116,55	118,00
3	160,62	160,22	163,93
4	326,53	286,94	344,41

Fonte: Autor.

As trajetórias de equilíbrio para o ponto A (ver [Figura 54](#)) são representadas na [Figura 55](#). Como se pode observar, a perda de estabilidade ocorre próximo da carga crítica. Na [Figura 55](#), a carga crítica é representada pelo valor correspondente à média dos três valores referentes ao modo 1, apresentado na [Tabela 12](#).

Figura 55 – Trajetórias de equilíbrio para o ponto A – sentido negativo do eixo  $z$

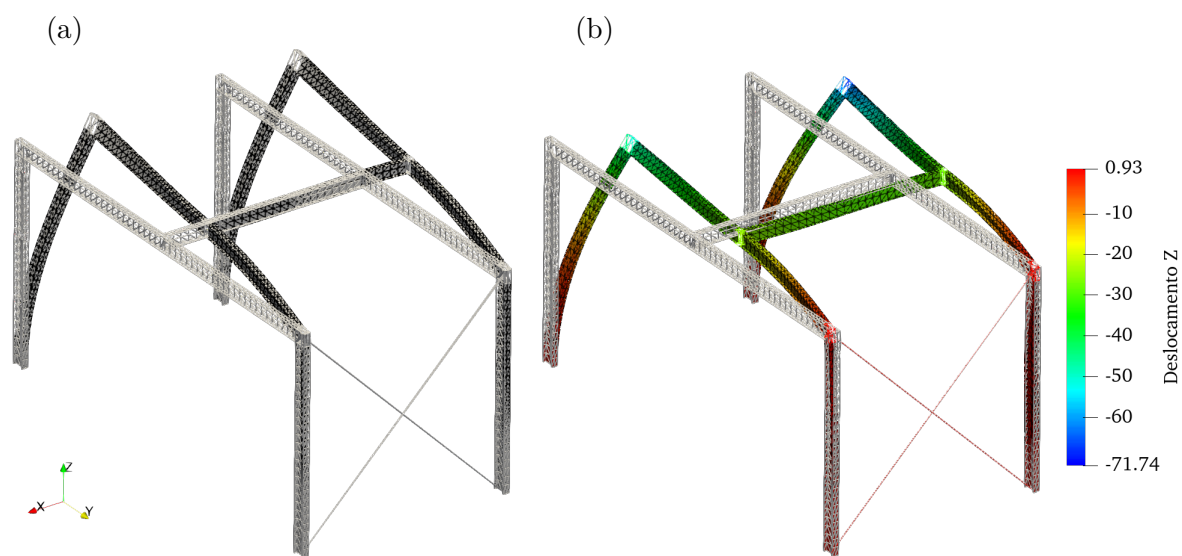


Fonte: Autor.

Na [Figura 56\(a\)](#), é apresentado o primeiro modo para a conexão I e na [Figura 56\(b\)](#), a configuração deformada da estrutura para um valor de carga de  $P = 102,85 kN$ . Neste exemplo, é fácil ver que o caminho de equilíbrio seguiu o primeiro modo de instabilidade depois que a carga limite foi atingida. Para as demais conexões, o comportamento observado foi idêntico.

A partir deste exemplo, observa-se que a formulação de conexão proposta é adequada para modelar estruturas tridimensionais gerais. Uma informação de interesse para a engenharia é que, para este pórtico modificado em específico, diferenças significativas em relação às conexões ocorrem apenas para deslocamentos elevados.

Figura 56 – Resultados para conexão I: (a) primeiro modo de instabilidade e (b) configuração deformada ( $u_{zA} = -28,96 \text{ cm}$ ,  $P = 102,85 \text{ kN}$ )



Fonte: Autor.



## CAPÍTULO 6

# PLASTICIDADE EM PEQUENAS DEFORMAÇÕES

Neste capítulo é incorporado à lei constitutiva o comportamento elasto-plástico do material em pequenas deformações. Essa incorporação é realizada por meio da decomposição aditiva do tensor de deformações em uma parcela puramente elástica e outra parcela puramente plástica. Inclui-se também a possibilidade de encruamento, que admite presença de rigidez durante o regime plástico. O encruamento é capaz de alterar a chamada superfície de plastificação, seja expandindo-a (encruamento positivo) ou contraíndo-a (encruamento negativo), como no encruamento isótropo, seja transladando-a, como no encruamento cinemático. No caso de rigidez nula no regime plástico, a superfície de plastificação não é alterada e o regime passa a ser denominado elasto-plástico perfeito.

A superfície de plastificação é responsável por delimitar a região no espaço das tensões em que ocorrem apenas variações de deformações elásticas. Esta superfície possui diferentes formas, a depender do tipo de material que está sendo estudado. Por exemplo, para materiais dúcteis, a superfície de plastificação é melhor representada pelos critérios de Tresca e de von Mises. Enquanto que para materiais frágeis, critérios como o de Mohr-Coulomb e o de Drucker-Prager são os mais adequados. No presente trabalho é utilizada a superfície de von Mises como critério de plastificação, visto que as estruturas de parede fina são geralmente compostas de materiais dúcteis, como o aço.

É de interesse também a incorporação de plasticidade em elementos unidimensionais, como treliça. Neste caso, apenas a componente de tensão normal é relevante na análise do comportamento mecânico. Assim, a superfície de plastificação é degenerada em dois pontos: limite de tensão de tração e limite de tensão de compressão.

Nas próximas seções uma breve descrição dos modelos de plasticidade é realizada. A formulação de plasticidade apresentada neste capítulo é bem consolidada na literatura e pode ser encontrada, por exemplo, em [Simo e Hughes \(1998\)](#) e [Souza Neto, Perić e Owen \(2008\)](#).

### 6.1 Modelo elasto-plástico unidimensional

A transição do regime elástico para o início do escoamento deve ser regido por meio de um critério de plastificação. Esse critério, para o caso unidimensional, se dá com base na tensão normal atuante  $S$ . Dessa forma, diz-se que o regime de escoamento é iniciado quando o valor absoluto da tensão,  $|S|$ , atinge o valor da tensão de escoamento  $S_Y$ .

Considerando o regime de pequenas deformações, realiza-se inicialmente a decomposição aditiva da deformação total:

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}^e + \mathbb{E}^p \quad (6.1)$$

em que  $\mathbb{E}^e$  é a parcela de deformação elástica e  $\mathbb{E}^p$  é a parcela de deformação plástica.

Dessa forma, a tensão elástica é definida como:

$$S = E\mathbb{E}^e = E(\mathbb{E} - \mathbb{E}^p) \quad (6.2)$$

A superfície de plastificação é descrita por meio de uma função escalar  $\Phi(S, \kappa, q)$ , em que  $\kappa \geq 0$  é o parâmetro de encruamento isótropo e  $q$  é denominado tensão de retorno (*back stress*) e dita a evolução do encruamento cinemático. Um estado de tensão no regime elástico possui níveis de tensão inferiores à tensão de escoamento, o que leva a  $\Phi(S, \kappa, q) < 0$ . No regime plástico, o estado de tensão se situa exatamente sobre a superfície de plastificação, isto é,  $\Phi(S, \kappa, q) = 0$ . De acordo com essa definição, um estado de tensão para o qual  $\Phi(S, \kappa, q) > 0$  é inadmissível. Desse modo, define-se para o caso unidimensional:

$$\Phi(S, \kappa, q) = |S - q| - S_\kappa(\kappa) \leq 0 \quad (6.3)$$

sendo  $S_\kappa(\kappa)$  a tensão de limite elástico função do parâmetro de encruamento isótropo  $\kappa$  e expressa como:

$$S_\kappa(\kappa) = S_Y + K\kappa \quad (6.4)$$

em que  $K$  é denominado módulo plástico de encruamento isótropo.

A evolução da deformação plástica deve ocorrer no sentido da tensão atuante. Em outras palavras, para uma tensão de tração igual ou acima do limite elástico, deve haver acréscimo de deformação plástica. Enquanto que para uma tensão de compressão cujo valor absoluto exceda o limite elástico, deve haver decréscimo da deformação plástica. Nesse sentido, define-se a seguinte lei de evolução para a deformação plástica:

$$\dot{\mathbb{E}}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(S - q) \quad (6.5)$$

em que  $\dot{\gamma}$  é denominado multiplicador plástico, que é nulo no regime elástico e assume valores positivos no regime plástico. A notação de ponto sobre a grandeza física indica taxa de variação temporal.

Uma descrição simples para a evolução do parâmetro de encruamento isótropo  $\kappa$  é assumir que o mesmo evolua em função da taxa de deformação plástica  $\dot{\mathbb{E}}^p$ . Para a tensão de retorno  $q$ , considera-se a lei de evolução proposta por Ziegler (1959). Assim, as leis de evolução para os parâmetros de encruamento são expressas como:

$$\dot{\kappa} = |\dot{\mathbb{E}}^p| = \dot{\gamma} \quad (6.6a)$$

$$\dot{q} = H\dot{\mathbb{E}}^p = \dot{\gamma}H \operatorname{sign}(S - q) \quad (6.6b)$$

em que  $H$  é denominado módulo de encruamento cinemático.

O multiplicador plástico foi definido de modo que no regime plástico,  $\Phi = 0$ , se tenha evolução dos parâmetros plásticos, isto é,  $\dot{\gamma} > 0$ . Já no regime elástico,  $\Phi < 0$ , tem-se que  $\dot{\gamma} = 0$ . Desse modo, define-se a chamada condição de complementaridade, ou condição de Kuhn-Tucker<sup>1</sup>:

$$\dot{\gamma}\Phi = 0 \quad \text{com } \dot{\gamma} \geq 0 \text{ e } \Phi \leq 0 \quad (6.7)$$

No regime plástico a função  $\Phi$  assume valor constante igual a zero. Portanto, sua taxa de variação no regime plástico é nula, isto é,  $\dot{\Phi} = 0$ . Nessa situação, tem-se  $\dot{\gamma} > 0$ . Na iminência de transição do regime plástico para o regime elástico, a função  $\Phi$  tende a sair do valor zero e assumir valores negativos, o que gera taxa de variação negativa, isto é,  $\dot{\Phi} < 0$ . Este último caso ocorre quando  $\dot{\gamma} = 0$ . Essa descrição define a chamada condição de consistência, expressa em termos matemáticos como:

$$\dot{\gamma}\dot{\Phi} = 0 \quad \text{com } \dot{\gamma} \geq 0 \text{ e } \dot{\Phi} \leq 0 \text{ para } \Phi = 0 \quad (6.8)$$

A taxa de variação temporal da função  $\Phi$  é expressa como:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial S} \dot{S} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \dot{\kappa} \\ &= \operatorname{sign}(S - q) [E(\dot{\mathbb{E}} - \dot{\mathbb{E}}^p) - \dot{q}] - K\dot{\kappa} \\ &= \operatorname{sign}(S - q)E\dot{\mathbb{E}} - \dot{\gamma}(E + H + K) \end{aligned} \quad (6.9)$$

<sup>1</sup> A chamada condição de Kuhn-Tucker (ou Karush-Kuhn-Tucker) é clássica na literatura de programação matemática convexa no contexto de minimização de funções sujeitas a restrições dadas por inequações (ver, por exemplo, Luenberger e Ye (2008)).

Para obter o valor de  $\dot{\gamma} > 0$ , deve-se impor, a partir da condição de consistência expressa na Equação (6.8),  $\dot{\Phi} = 0$ . Dessa forma, obtém-se a seguinte expressão para o multiplicador plástico:

$$\dot{\gamma} = \frac{\text{sign}(S - q)E}{E + H + K} \dot{\mathbb{E}} \quad (6.10)$$

No regime plástico, a taxa de variação da tensão  $S$  pode ser escrita a partir das Equações (6.2), (6.5) e (6.10) como:

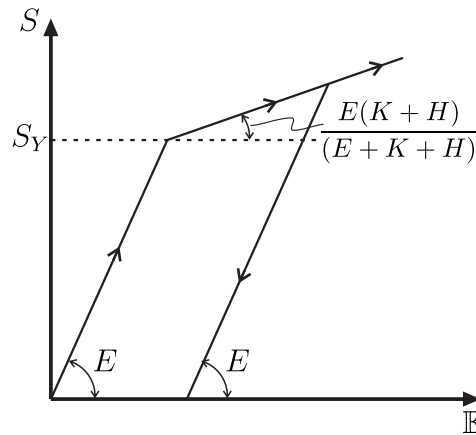
$$\dot{S} = E(\dot{\mathbb{E}} - \dot{\mathbb{E}}^p) = \left( E - \frac{E^2}{E + H + K} \right) \dot{\mathbb{E}} = \frac{E(H + K)}{E + H + K} \dot{\mathbb{E}} \quad (6.11)$$

Sabendo que  $\dot{S} = (\partial S / \partial \mathbb{E}) \dot{\mathbb{E}}$ , a seguinte expressão para o módulo constitutivo é obtida:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbb{E}} = \begin{cases} E & \text{se } \dot{\gamma} = 0 \\ \frac{E(H + K)}{E + H + K} & \text{se } \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

Na Figura 57 é ilustrado o diagrama tensão-deformação para uma lei constitutiva elasto-plástica. Observa-se que o regime elástico é caracterizado apenas pelo módulo de elasticidade  $E$ , enquanto que o regime plástico depende também dos módulos plásticos de encruamento isótropo  $K$  e cinemático  $H$ .

Figura 57 – Diagrama tensão-deformação para lei constitutiva elasto-plástica



Fonte: Autor.

### 6.1.1 Algoritmo em passo finito

As relações apresentadas até aqui foram escritas em termos de taxa de variação exata, representadas por meio de derivada temporal. No entanto, a aplicação em métodos numéricos exige que a formulação seja adaptada para levar em consideração a discretização temporal (ou pseudo-temporal, no caso do problema estático).



Dessa forma, as variáveis plásticas do passo atual  $n + 1$  são escritas em função das variáveis conhecidas do passo  $n$  como:

$$\mathbb{E}_{n+1} = \mathbb{E}_n + \Delta\mathbb{E}_{n+1} \quad (6.13a)$$

$$\mathbb{E}_{n+1}^p = \mathbb{E}_n^p + \Delta\mathbb{E}_{n+1}^p \quad (6.13b)$$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\kappa_{n+1} \quad (6.13c)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta q_{n+1} \quad (6.13d)$$

$$S_{n+1} = S_n + \Delta S_{n+1} \quad (6.13e)$$

Para a determinação de alguns dos incrementos presentes nas expressões (6.13) é necessário conhecer as grandezas do passo  $n + 1$ , sendo, portanto, um procedimento implícito. Dessa forma, surge a necessidade de se executar estágios de previsão e de correção.

### 6.1.2 Estágio de previsão

No estágio de previsão, admite-se que a resposta é puramente elástica, ou seja,  $\Delta\mathbb{E}_{n+1}^p = \Delta\kappa_{n+1} = \Delta q_{n+1} = 0$ . Sendo assim, a deformação plástica e os parâmetros de encruamento permanecem iguais aos do passo  $n$ , e a tensão tentativa  $S_{n+1}^t$  é expressa como:

$$S_{n+1}^t = E(\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n^p) \quad (6.14)$$

Com isso, pode-se verificar o critério de plastificação para esta primeira tentativa. Assim, determina-se o valor tentativa  $\Phi_{n+1}^t$  a partir desse cenário de previsão:

$$\Phi_{n+1}^t = |S_{n+1}^t - q_n| - (S_Y + K\kappa_n) \quad (6.15)$$

Se  $\Phi_{n+1}^t \leq 0$ , a previsão elástica se confirma e  $S_{n+1} = S_{n+1}^t$ . Caso ocorra  $\Phi_{n+1}^t > 0$ , que é uma situação inadmissível, a previsão elástica não se confirma. Nesse caso, considera-se que há evolução das variáveis plásticas, sendo essa evolução computada no estágio de correção.

### 6.1.3 Estágio de correção

O estágio de correção é exigido apenas quando a previsão elástica não se confirma, ocorrendo, portanto, evolução das variáveis plásticas. Dessa forma, deve-se impor  $\Phi_{n+1} = 0$ . Na forma discreta, a evolução das variáveis plásticas podem ser escritas como:

$$\Delta \mathbb{E}_{n+1}^p = \Delta \gamma \operatorname{sign}(S_{n+1} - q_{n+1}) \quad (6.16a)$$

$$\Delta \kappa_{n+1} = \Delta \gamma \quad (6.16b)$$

$$\Delta q_{n+1} = \Delta \gamma H \operatorname{sign}(S_{n+1} - q_{n+1}) \quad (6.16c)$$

em que  $\Delta \gamma$  é o multiplicador plástico para a formulação em passos finitos.

A condição de complementaridade pode ser reescrita no contexto de passo finito como:

$$\Delta \gamma \Phi_{n+1} = 0 \quad \text{com } \Delta \gamma \geq 0 \text{ e } \Phi_{n+1} \leq 0 \quad (6.17)$$

A imposição  $\Phi_{n+1} = 0$  permite que seja determinado o valor de  $\Delta \gamma > 0$ . Dessa forma, e juntamente com as leis de evolução dadas pelas expressões (6.16), pode-se obter a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= |S_{n+1} - q_{n+1}| - (S_y + K \kappa_{n+1}) \\ &= \Phi_{n+1}^t - \Delta \gamma (E + H + K) = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

A partir da Equação (6.18), obtém-se a expressão para o multiplicador plástico:

$$\Delta \gamma = \frac{\Phi_{n+1}^t}{E + H + K} \quad (6.19)$$

Com  $\Delta \gamma$  conhecido, os incrementos das variáveis plásticas ficam completamente determinados. O valor da tensão atuante é então obtido a partir das variáveis atualizadas. Pode ser também demonstrado que o módulo constitutivo elasto-plástico tangente para o algoritmo em passo finito é o mesmo apresentado na Equação (6.12).

## 6.2 Modelo elasto-plástico tridimensional

O procedimento geral de formulação do modelo elasto-plástico tridimensional é análogo ao do caso unidimensional. A principal diferença é o fato de algumas grandezas anteriormente escalares se tornarem tensoriais. Assim, em diversas etapas são exigidas operações tensoriais, o que torna a dedução mais dispendiosa.

Realiza-se agora a decomposição aditiva do tensor de deformações de Green-Lagrange:

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}^e + \mathbb{E}^p \quad (6.20)$$

sendo  $\mathbb{E}^e$  o tensor de deformações elásticas e  $\mathbb{E}^p$  o tensor de deformações plásticas.

Dessa forma, o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é expresso como:

$$\mathbf{S} = \mathfrak{C} : \mathbb{E}^e = \mathfrak{C} : (\mathbb{E} - \mathbb{E}^p) \quad (6.21)$$

em que  $\mathfrak{C}$  é o tensor constitutivo da lei de Saint-Venant-Kirchhoff.

Considerando material isótropo, isto é, suas propriedades são as mesmas em qualquer direção, é natural afirmar que o critério de plastificação pode ser escrito em função dos invariantes do tensor de tensões. No caso do critério de von Mises, pode-se escrevê-lo em função do invariante  $J_2$  a partir da seguinte expressão:

$$\Phi(J_2, \sigma_\kappa) = \sqrt{2J_2} - \sqrt{\frac{2}{3}}S_\kappa(\kappa) \leq 0 \quad (6.22)$$

na qual  $S_\kappa = S_Y + K\kappa$  para encruamento isótropo linear e  $S_Y$  é o valor da tensão de escoamento. O invariante  $J_2$  do tensor de tensões  $\mathbf{S}$  é definido como:

$$J_2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{S}^D\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{S}\|^2 - \frac{1}{6}\text{tr}(\mathbf{S})^2 \quad (6.23)$$

na qual o sobrescrito  $D$  indica parcela desviadora.

Em analogia ao problema unidimensional, a presença de encruamento cinemático é caracterizada pela translação da superfície de plastificação ao longo do eixo hidrostático. Assim, o tensor  $\mathbf{S}$  é substituído por  $\mathbf{S} - \mathbf{X}$ , em que o tensor  $\mathbf{X}$  é denominado tensão de retorno (ou *back stress*) e  $\text{tr}(\mathbf{X}) = 0$ . O invariante  $J_2$  para o tensor de tensões transladado é escrito como:

$$J_2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{S}^D - \mathbf{X}\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{S} - \mathbf{X}\|^2 - \frac{1}{6}\text{tr}(\mathbf{S})^2 \quad (6.24)$$

Outra maneira de se escrever o critério de von Mises é em função da tensão equivalente de von Mises  $S^{VM}$ . Sendo  $S^{VM} = \sqrt{3J_2}$ , o critério da expressão (6.22) resulta em:

$$S^{VM} - (S_Y + K\kappa) \leq 0 \quad (6.25)$$

Para o problema unidimensional a tensão equivalente de von Mises é igual à tensão atuante. Portanto, o critério apresentado na Equação (6.25), que é equivalente ao apresentado na Equação (6.22), recupera o caso unidimensional.

A forma mais comum de se escrever o critério de von Mises é em função do tensor transladado  $\mathbf{S}^D - \mathbf{X}$ . Portanto, o critério de plastificação passa a ser escrito como:

$$\Phi(\mathbf{S}, \mathbf{X}, S_\kappa) = \|\mathbf{S}^D - \mathbf{X}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} S_\kappa \leq 0 \quad (6.26)$$

As condições de complementaridade e de consistência são as mesmas apresentadas nas Equações (6.7) e (6.8) para o caso unidimensional. Uma expressão para  $\dot{\gamma}$  pode ser obtida a partir da condição de consistência sabendo que para  $\dot{\gamma} > 0$  deve-se ter  $\dot{\Phi} = 0$ . Dessa forma, tem-se:

$$\dot{\Phi}(\mathbf{S}, \mathbf{X}, S_\kappa) = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial \Phi}{\partial S_\kappa} \dot{S}_\kappa = 0 \quad (6.27)$$

em que as derivadas de  $\Phi$  são expressas como:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}^D - \mathbf{X}}{\|\mathbf{S}^D - \mathbf{X}\|} = \mathbf{N}^p \quad (6.28a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = -\frac{\mathbf{S}^D - \mathbf{X}}{\|\mathbf{S}^D - \mathbf{X}\|} = -\mathbf{N}^p \quad (6.28b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial S_\kappa} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (6.28c)$$

Definem-se agora as leis de evolução para  $\mathbb{E}^p$ ,  $\kappa$  e  $\mathbf{X}$ . Para o tensor de deformações plásticas adota-se a lei associativa, que admite evolução segundo a direção normal à superfície de plastificação. A direção normal é representada pelo tensor  $\mathbf{N}^p$ , o que permite escrever:

$$\dot{\mathbb{E}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\gamma} \mathbf{N}^p \quad (6.29)$$

Para a evolução do parâmetro de encruamento isótropo  $\kappa$ , considera-se também uma lei associativa. Dessa forma, a evolução é definida como:

$$\dot{\kappa} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial S_\kappa} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (6.30)$$

O sinal negativo presente na expressão (6.30) foi inserido para que a evolução do encruamento seja sempre positiva, visto que por definição tem-se  $\dot{\gamma} \geq 0$ . Por fim, a lei de evolução do tensor  $\mathbf{X}$  é definida como:

$$\dot{\mathbf{X}} = -\dot{\gamma} \frac{2}{3} H \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = \dot{\gamma} \frac{2}{3} H \mathbf{N}^p \quad (6.31)$$

em que o fator  $2/3$  foi inserido de modo a se recuperar o caso unidimensional.

Dessa forma, a partir da Equação (6.27) e das expressões subsequentes, o multiplicador plástico  $\dot{\gamma}$  é fornecido como:

$$\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{N}^p : \mathbf{e} : \dot{\mathbb{E}}}{\mathbf{N}^p : \mathbf{e} : \mathbf{N}^p + \frac{2}{3}(H + K)} \quad (6.32)$$

Como o tensor  $\mathbf{e}$  é positivo definido e os módulos  $H$  e  $K$  são números reais positivos, a condição  $\dot{\gamma} \geq 0$  é verificada se o numerador da Equação (6.32) resultar número real não negativo. Se for considerado o emprego de uma superfície de plastificação suave, como a de von Mises, a condição de positividade do numerador é naturalmente atendida. Este fato decorre de que, em analogia a uma superfície no espaço tridimensional, o ângulo entre o tensor normal  $\mathbf{N}^p$  e a taxa  $\mathbf{e} : \dot{\mathbb{E}}$  resulta sempre menor ou igual a  $\pi/2$  (SIMO; HUGHES, 1998).

Assim, a taxa de variação do tensor de tensões  $\mathbf{S}$  pode ser escrita como:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{e} : (\dot{\mathbb{E}} - \dot{\mathbb{E}}^p) = \left[ \mathbf{e} - \frac{(\mathbf{e} : \mathbf{N}^p) \otimes (\mathbf{e} : \mathbf{N}^p)}{\mathbf{N}^p : \mathbf{e} : \mathbf{N}^p + \frac{2}{3}(H + K)} \right] : \dot{\mathbb{E}} \quad (6.33)$$

ou, em notação indicial:

$$\dot{S}_{ij} = \left[ \mathbf{e}_{ijkl} - \frac{\mathbf{e}_{ijmn} N_{mn}^p \mathbf{e}_{klpq} N_{pq}^p}{N_{mn}^p \mathbf{e}_{mnpq} N_{pq}^p + \frac{2}{3}(H + K)} \right] \dot{\mathbb{E}}_{kl} \quad (6.34)$$

sendo a expressão entre colchetes o tensor constitutivo elasto-plástico tangente. De forma geral, o tensor constitutivo elasto-plástico tangente  $\mathbf{e}^{ep}$  é definido como:

$$\mathbf{e}^{ep} = \begin{cases} \mathbf{e} & \text{se } \dot{\gamma} = 0 \\ \mathbf{e} - \frac{(\mathbf{e} : \mathbf{N}^p) \otimes (\mathbf{e} : \mathbf{N}^p)}{\mathbf{N}^p : \mathbf{e} : \mathbf{N}^p + \frac{2}{3}(H + K)} & \text{se } \dot{\gamma} > 0 \end{cases} \quad (6.35)$$

Substituindo a expressão para  $\mathbf{e}$  fornecida pela Equação (2.11), o tensor constitutivo elasto-plástico tangente para  $\dot{\gamma} > 0$  resulta em:

$$\mathbf{e}^{ep} = \mathbf{e} - 2G \left( 1 + \frac{H + K}{3G} \right)^{-1} \mathbf{N}^p \otimes \mathbf{N}^p \quad (6.36)$$

O tensor apresentado na Equação (6.35) é também denominado tensor constitutivo elasto-plástico tangente consistente, pois sua obtenção parte da condição de consistência. Em correspondência ao algoritmo em passo finito, descrito nas próximas subseções, é determinado o tensor constitutivo elasto-plástico algorítmico. Este último corresponde à linearização exata a ser utilizada no método de Newton-Raphson, tendo em vista o caráter incremental do procedimento numérico.

### 6.2.1 Algoritmo em passo finito

Assim como descrito para o caso unidimensional, o algoritmo em passo finito é realizado em correspondência a uma análise incremental. Dessa forma, a atualização das grandezas do passo  $n + 1$  a partir do passo  $n$  se dá por meio das seguintes expressões:

$$\mathbb{E}_{n+1} = \mathbb{E}_n + \Delta\mathbb{E}_{n+1} \quad (6.37a)$$

$$\mathbb{E}_{n+1}^p = \mathbb{E}_n^p + \Delta\mathbb{E}_{n+1}^p \quad (6.37b)$$

$$\kappa_{n+1} = \kappa_n + \Delta\kappa_{n+1} \quad (6.37c)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \Delta\mathbf{X}_{n+1} \quad (6.37d)$$

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \Delta\mathbf{S}_{n+1} \quad (6.37e)$$

Assim como no caso unidimensional, o procedimento em passo finito para o caso tridimensional é implícito. Dessa forma, procede-se aos estágios de previsão e de correção.

### 6.2.2 Estágio de previsão

No estágio de previsão, admite-se que não há atualização das variáveis plásticas, obtendo-se desse modo uma solução tentativa. Nesse contexto, tem-se que  $\Delta\kappa_{n+1} = 0$ ,  $\Delta\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{0}$  e  $\Delta\mathbb{E}_{n+1}^p = \mathbf{0}$ . A partir desta hipótese, o tensor de tensões tentativa é fornecido como:

$$\mathbf{S}_{n+1}^t = \mathbf{e} : (\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n^p) \quad (6.38)$$

Substituindo a expressão do tensor constitutivo, Equação (2.11), na Equação (6.38), obtém-se:

$$\mathbf{S}_{n+1}^t = \lambda \operatorname{tr}(\mathbb{E}_{n+1})\mathbf{I} + 2G(\mathbb{E}_{n+1} - \mathbb{E}_n^p) \quad (6.39)$$

em que  $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$ .

Após algumas manipulações algébricas, obtém-se o tensor desviador  $(\mathbf{S}^D)_{n+1}^t$ , cuja expressão é fornecida como:

$$(\mathbf{S}^D)_{n+1}^t = 2G(\mathbb{E}_{n+1}^D - \mathbb{E}_n^p) \quad (6.40)$$

Com as grandezas necessárias obtidas, verifica-se o critério de plastificação considerando a previsão elástica:

$$\Phi_{n+1}^t = \|(\mathbf{S}^D)_{n+1}^t - \mathbf{X}_n\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(S_Y + K\kappa_n) \quad (6.41)$$

Se  $\Phi_{n+1}^t \leq 0$ , a previsão elástica é verificada e as grandezas denominadas tentativas são as efetivamente atuantes. Caso contrário, realiza-se o estágio de correção.

## 6.2.3 Estágio de correção

A não verificação da previsão elástica implica necessariamente em evolução das variáveis plásticas, isto é,  $\Delta\gamma > 0$ . Assim, a condição de complementaridade exige que  $\Phi_{n+1} = 0$ . As leis de evolução adaptadas para o algoritmo em passo finito são dadas em função do multiplicador plástico  $\Delta\gamma$  como:

$$\Delta\mathbb{E}_{n+1}^p = \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1}^p \quad (6.42a)$$

$$\Delta\kappa_{n+1} = \Delta\gamma\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (6.42b)$$

$$\Delta\mathbf{X}_{n+1} = \Delta\gamma\frac{2}{3}H\mathbf{N}_{n+1}^p \quad (6.42c)$$

A condição  $\Phi_{n+1} = 0$  juntamente com as leis de evolução das expressões (6.42) permite obter a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \|\mathbf{S}_{n+1}^D - \mathbf{X}_{n+1}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(S_Y + K\kappa_{n+1}) \\ &= \Phi_{n+1}^t - 2G\Delta\gamma\left(1 + \frac{H+K}{3G}\right) = 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

Portanto, o multiplicador plástico  $\Delta\gamma$  é determinado a partir da Equação (6.43) como:

$$\Delta\gamma = \frac{\Phi_{n+1}^t}{2G\left(1 + \frac{H+K}{3G}\right)} \quad (6.44)$$

Dessa forma, os incrementos das variáveis plásticas ficam completamente determinados, encerrando o estágio de correção.

## 6.2.4 Tensor constitutivo elasto-plástico algorítmico

Com a finalidade de se garantir a taxa de convergência do método de Newton-Raphson, é necessária a determinação do tensor constitutivo elasto-plástico algorítmico. O tensor constitutivo é determinado a partir de:

$$\mathbf{e}_{n+1}^{ep} = \frac{\partial\mathbf{S}_{n+1}}{\partial\mathbb{E}_{n+1}} \quad (6.45)$$

O tensor de tensões expresso em função do incremento de deformação plástica é fornecido como:

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{e} : \mathbb{E}_{n+1} - \mathbf{e} : (\mathbb{E}_n^p + \Delta\gamma\mathbf{N}_{n+1}) \quad (6.46)$$

Substituindo a expressão do tensor constitutivo elástico na segunda parcela da Equação (6.46) e derivando-se com relação à  $\mathbb{E}_{n+1}$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \mathbb{E}_{n+1}} = \mathbf{c} - 2G \left( \Delta\gamma \frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^p}{\partial \mathbb{E}_{n+1}} + \mathbf{N}_{n+1}^p \otimes \frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbb{E}_{n+1}} \right) \quad (6.47)$$

As derivadas de  $\mathbf{N}_{n+1}$  e  $\Delta\gamma$  são obtidas a partir das expressões apresentadas nos estágios de previsão e de correção. Nesse sentido, obtém-se:

$$\frac{\partial \Delta\gamma}{\partial \mathbb{E}_{n+1}} = \left( 1 + \frac{H + K}{3G} \right)^{-1} \mathbf{N}_{n+1}^p \quad (6.48a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}_{n+1}^p}{\partial \mathbb{E}_{n+1}} = \frac{2G}{\|(\mathbf{S}^D)_{n+1}^t - \mathbf{X}_n\|} \left( \mathfrak{J} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathbf{N}_{n+1}^p \otimes \mathbf{N}_{n+1}^p \right) \quad (6.48b)$$

Substituindo as expressões (6.48) em (6.47), obtém-se a expressão final para o tensor constitutivo elasto-plástico tangente:

$$\mathbf{c}_{n+1}^{ep} = \mathbf{c} - 2G\theta_{n+1} \left( \mathfrak{J} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - 2G\bar{\theta}_{n+1} \mathbf{N}_{n+1}^p \otimes \mathbf{N}_{n+1}^p \quad (6.49)$$

sendo

$$\theta_{n+1} = \frac{2G\Delta\gamma}{\|(\mathbf{S}^D)_{n+1}^t - \mathbf{X}_n\|} \quad (6.50a)$$

$$\bar{\theta}_{n+1} = \left( 1 + \frac{H + K}{3G} \right)^{-1} - \theta_{n+1} \quad (6.50b)$$

Observa-se que a Equação (6.49) resulta na (6.36) quando se toma  $\Delta\gamma = 0$ . Essa constatação indica que, para passos pequenos, o tensor constitutivo fornecido pela Equação (6.36) constitui uma boa aproximação para o tensor constitutivo algorítmico.

A expressão (6.49) pode ser escrita em notação indicial, omitindo-se o subscrito  $n + 1$  das grandezas tensoriais, como:

$$\mathbf{c}_{ijkl}^{ep} = \mathbf{c}_{ijkl} - 2G\theta_{n+1} \left( \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) - 2G\bar{\theta}_{n+1} N_{ij}^p N_{kl}^p \quad (6.51)$$

Para facilitar a implementação computacional baseada no MEF Posicional, é interessante a obtenção da derivada de  $\mathbf{S}_{n+1}$  com relação ao vetor de parâmetros nodais. Assim, tem-se que:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \mathbb{E}_{n+1}} : \frac{\partial \mathbb{E}_{n+1}}{\partial \mathbf{Y}} \quad (6.52)$$

onde  $\partial \mathbb{E}_{n+1} / \partial \mathbf{Y}$  é determinado a partir da cinemática do elemento finito empregado.

Realizando-se as simplificações necessárias, a seguinte expressão é obtida:



$$\frac{\partial \mathbf{S}_{n+1}}{\partial \Upsilon} = \mathbf{c} : \frac{\partial \mathbb{E}_{n+1}}{\partial \Upsilon} - 2G \left[ \bar{\theta}_{n+1} (\mathbf{N}_{n+1}^p \otimes \mathbf{N}_{n+1}^p) : \frac{\partial \mathbb{E}_{n+1}}{\partial \Upsilon} + \theta_{n+1} \frac{\partial \mathbb{E}_{n+1}^D}{\partial \Upsilon} \right] \quad (6.53)$$

ou, em notação indicial, omitindo-se o subscrito  $n + 1$  nas grandezas tensoriais:

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial \Upsilon} = \mathbf{c}_{ijkl} \frac{\partial \mathbb{E}_{kl}}{\partial \Upsilon} - 2G \left[ \bar{\theta}_{n+1} N_{ij}^p N_{kl}^p \frac{\partial \mathbb{E}_{kl}}{\partial \Upsilon} + \theta_{n+1} \left( \frac{\partial \mathbb{E}_{ij}}{\partial \Upsilon} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \mathbb{E}_{kk}}{\partial \Upsilon} \right) \right] \quad (6.54)$$

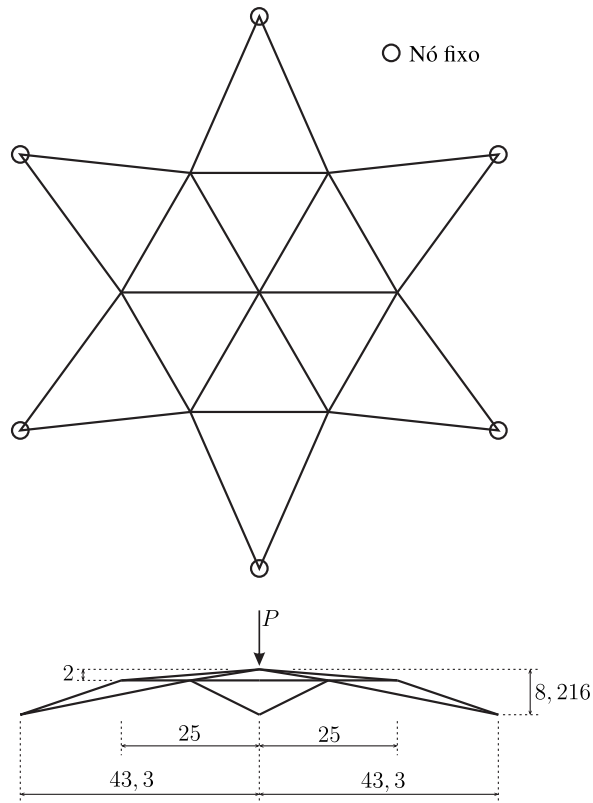
### 6.3 Exemplos numéricos

Nesta seção serão apresentados dois exemplos de validação da formulação de plasticidade descrita neste capítulo. O primeiro exemplo se refere à validação da plasticidade unidimensional aplicada ao elemento finito de treliça. O segundo exemplo consiste na validação da plasticidade tridimensional aplicada ao elemento finito de casca.

#### 6.3.1 Domo treliçado

Este exemplo, apresentado em [Greco et al. \(2006\)](#), é comumente utilizado para realização de análise não-linear geométrica. A estrutura consiste em 24 elementos de treliça e 13 nós, arranjados conforme apresentado na [Figura 58](#). As propriedades utilizadas são as seguintes:  $E = 3 \cdot 10^5 \text{ N/cm}^2$ ,  $A = 3,17 \text{ cm}^2$ ,  $S_Y = 200 \text{ N/cm}^2$  e  $K = 0$ .

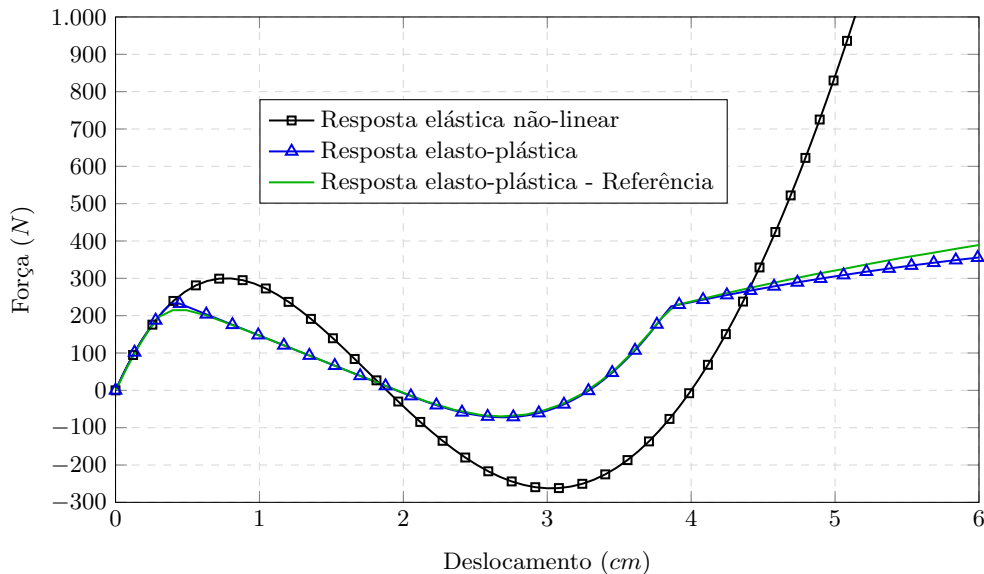
Figura 58 – Vistas frontal e superior do domo treliçado



Fonte: Autor.

A análise foi realizada por meio da estratégia do comprimento de arco, descrita no [Capítulo 4](#). Para isso, considera-se que a força aplicada possui intensidade controlada pelo fator  $\lambda$ . Na [Figura 59](#) apresentam-se as trajetórias de equilíbrio geradas considerando comportamentos elástico e elasto-plástico do material, sendo a resposta de referência a apresentada por [Greco et al. \(2006\)](#).

Figura 59 – Deslocamento vertical do ponto de aplicação da força



Fonte: Autor.

A partir do gráfico, observa-se que os resultados estão de acordo com a solução de referência para comportamento elasto-plástico. Uma ligeira defasagem é observada no trecho final da análise, onde ocorrem as maiores intensidades de deformações. Essa diferença é explicada pelas diferentes leis constitutivas adotadas. No presente trabalho utilizou-se a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, baseada numa medida quadrática de deformação, enquanto que em [Greco et al. \(2006\)](#) foi utilizada a lei de Hooke. Ambas as leis produzem resultados coincidentes no âmbito das pequenas deformações.

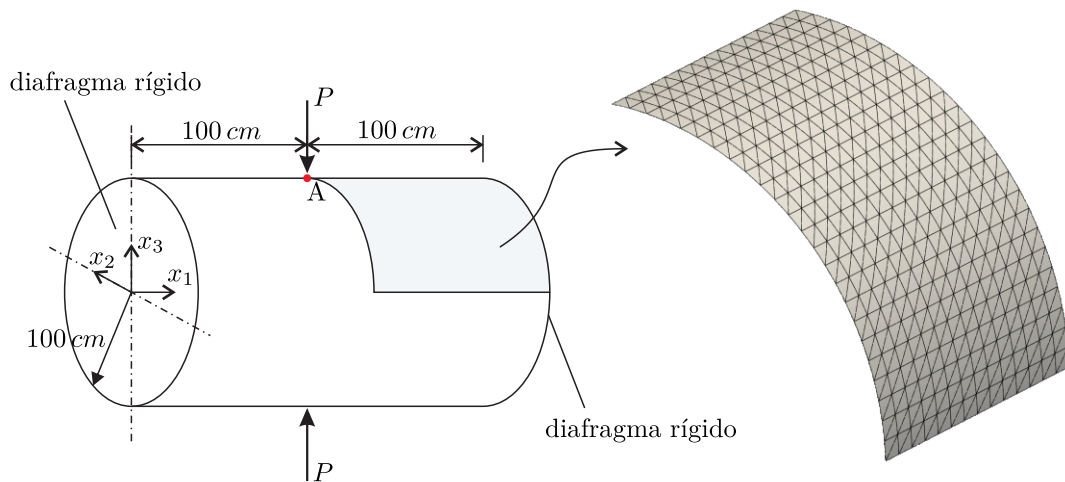
### 6.3.2 Tubo cilíndrico

Este segundo exemplo consiste de uma tubo cilíndrico com diafragmas rígidos em suas extremidades, conforme [Figura 60](#). No tubo atua um sistema de duas forças auto-equilibradas, cada uma com intensidade  $P = 40 \text{ kN}$ . A parede do tubo possui espessura  $h_0 = 1 \text{ cm}$  e o material empregado possui as seguintes propriedades:  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $K = 500 \text{ kN/cm}^2$  e  $S_Y = 25 \text{ kN/cm}^2$ .

Devido à simetria do problema analisado, modela-se apenas um octante da sua geometria. A malha utilizada para a modelagem é constituída de 672 elementos finitos triangulares com aproximação polinomial cúbica e totaliza 21973 graus de liberdade, ver

Figura 60. Na aresta conectada ao diafragma rígido, as restrições aplicadas são:  $u_2 = u_3 = 0$ . Nas demais arestas são aplicadas condições de simetria. Para a determinação das trajetórias de equilíbrio, considera-se que a força  $P$  é aplicada de forma incremental ao longo de 50 passos de carregamento.

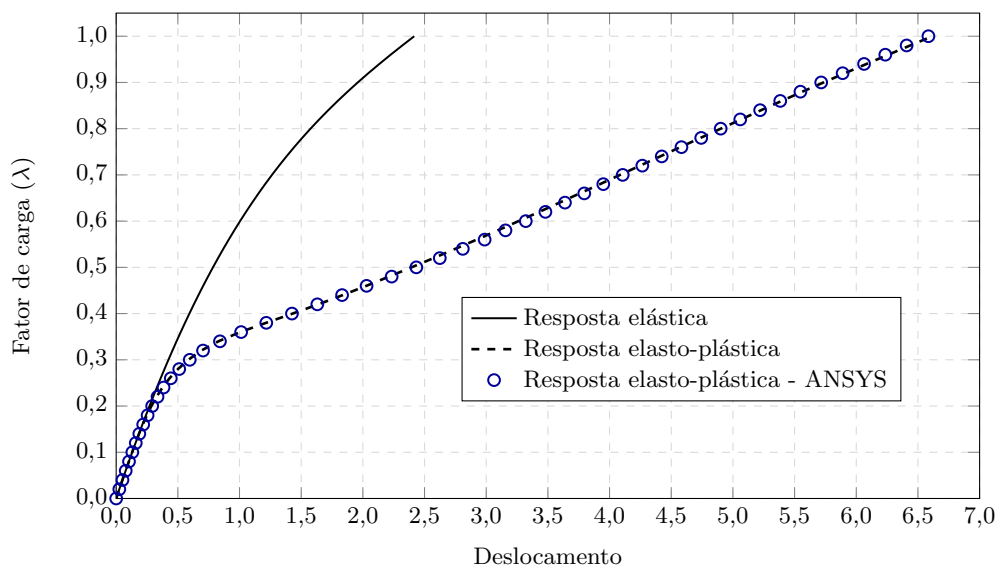
Figura 60 – Geometria e discretização do tubo cilíndrico



Fonte: Autor.

Foram obtidos os resultados para uma análise elástica e uma análise elasto-plástica. Esta última foi também realizada no *software* comercial ANSYS (ANSYS®, 2020) para fins de validação. No ANSYS, foi empregado o elemento denominado SHELL281, que corresponde ao elemento finito quadrilateral de 8 nós, e uma discretização com 11406 graus de liberdade. A comparação entre as respostas está apresentada na Figura 61.

Figura 61 – Deslocamento vertical para baixo do ponto A



Fonte: Autor.

Na [Figura 61](#) estão apresentadas as respostas elástica e elasto-plástica, bem como a solução fornecida pelo *software* ANSYS. Verifica-se que os resultados obtidos para a análise elasto-plástica estão de acordo com o fornecido pelo *software* ANSYS, validando a formulação implementada.

## CAPÍTULO 7

### CONTATO ENTRE SUPERFÍCIES

Neste capítulo é apresentada uma formulação de contato nó-a-superfície para tratamento de contato entre superfícies. Essa formulação decorre de simplificações sobre a formulação integral de contato, que será brevemente descrita a seguir.

Tomando-se um sistema contendo dois sólidos distintos, denotados pelos índices (1) e (2), a energia total do sistema é igual à soma das energias associadas a cada um dos sólidos. Imagina-se agora o cenário em que ocorra contato entre os sólidos numa determinada região  $\Gamma_c^{(1)}$  do contorno do sólido (1) e  $\Gamma_c^{(2)}$  do contorno do sólido (2). A ocorrência do contato gera forças de superfície  $\mathbf{p}_c^1$  e  $\mathbf{p}_c^2$ . Considerando que essas forças são de natureza conservativa, a presença das mesmas implica na adição das seguintes parcelas ao funcional de energia:

$$\Pi_c = - \int_{\Gamma_c^{(1)}} \mathbf{p}_c^1 \cdot \mathbf{y}^1 d\Gamma_c^{(1)} - \int_{\Gamma_c^{(2)}} \mathbf{p}_c^2 \cdot \mathbf{y}^2 d\Gamma_c^{(2)} \quad (7.1)$$

em que  $\mathbf{y}^1$  e  $\mathbf{y}^2$  são as funções posições dos sólidos (1) e (2), respectivamente.

Como a área de contato deve ser a mesma para os dois sólidos, faz-se  $\Gamma_c = \Gamma_c^{(1)} = \Gamma_c^{(2)}$ . Além disso, da terceira Lei de Newton conclui-se que  $\mathbf{p}_c^1 = -\mathbf{p}_c^2$ . Assim, pode-se escolher ou  $\Gamma_c^{(1)}$  ou  $\Gamma_c^{(2)}$  para a realização da integração. Adotando integração sobre  $\Gamma_c^{(2)}$  e fazendo  $\mathbf{p}_c = \mathbf{p}_c^1 = -\mathbf{p}_c^2$ , a parcela de energia devido ao contato expressa na Equação (7.1) é reescrito como:

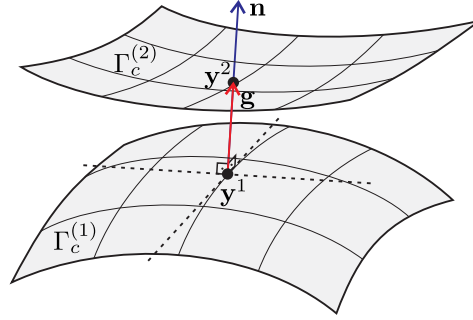
$$\Pi_c = \int_{\Gamma_c} \mathbf{p}_c \cdot (\mathbf{y}^2 - \mathbf{y}^1) d\Gamma_c = \int_{\Gamma_c} \mathbf{p}_c \cdot \mathbf{g} d\Gamma_c \quad (7.2)$$

em que  $\mathbf{g} = \mathbf{y}^2 - \mathbf{y}^1$  é definido como o vetor *gap*, ver [Figura 62](#).

Particularizando para o caso de contato sem atrito, apenas as componentes normais à superfície são de interesse. Assim, pode-se escrever  $\mathbf{p}_c = p_N \mathbf{n}$  e  $\mathbf{g} = g_N \mathbf{n}$ , em que  $p_N$  e  $g_N$  são as componentes de  $\mathbf{p}_c$  e de  $\mathbf{g}$ , respectivamente, na direção da normal exterior  $\mathbf{n}$  de  $\Gamma_c^{(1)}$ . Portanto, a parcela de energia para essa particularização resulta em:

$$\Pi_c = \int_{\Gamma_c} p_N g_N d\Gamma_c \quad (7.3)$$

Figura 62 – Superfícies candidatas ao contato, sendo  $\mathbf{g}$  o vetor *gap* e  $\mathbf{n}$  a normal exterior à  $\Gamma_c^{(1)}$ .



Fonte: Autor.

Na região de contato  $\Gamma_c$ , deve-se garantir  $g_N = 0$ , de modo a respeitar a condição de não-interpenetração entre os sólidos. Considerando que não há adesão entre os sólidos, a força de contato deve resultar sempre compressiva, isto é,  $p_N < 0$ . Quando não há contato, observa-se  $p_N = 0$  e  $g_N > 0$ . Em suma,  $p_N$  e  $g_N$  atendem à chamada condição de complementaridade, ou condição de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), expressa como:

$$p_N g_N = 0 \quad \text{com} \quad g_N \geq 0 \text{ e } p_N \leq 0 \quad (7.4)$$

A imposição da condição expressa na Equação (7.4) acarreta na anulação da parcela de energia apresentada na Equação (7.3). Portanto, a ocorrência do contato como aqui descrito não altera a energia do sistema, sendo, portanto, um contato elástico.

Numa análise de contato, em geral não é conhecida a priori a forma de  $\Gamma_c$ . Isso implica dificuldade adicional na formulação numérica do problema de contato. Apesar dessa dificuldade, há, por exemplo, o método *mortar* (WRIGGERS, 2006), cujo desenvolvimento numérico é baseado na formulação integral de contato. No entanto, a aplicação de métodos de contato que se utilizam de equações integrais não é simples, principalmente quando se trata de análises tridimensionais. Em vista disso, a implementação do método *mortar* não está no escopo do presente trabalho.

Uma aproximação comumente realizada em análises de contato é a aproximação da integral sobre o contorno  $\Gamma_c$  por um somatório em pontos discretos de  $\Gamma_c$ . Assim, a contribuição à energia é aproximada como:

$$\Pi_c = \int_{\Gamma_c} p_N g_N d\Gamma_c \approx \sum_{i=1}^N (p_N)_i (g_N)_i S_i = \sum_{i=1}^N (f_N)_i (g_N)_i \quad (7.5)$$

sendo  $N$  o número de pontos escolhidos,  $S_i$  a área de influência de cada ponto  $i$  e  $(f_N)_i = (p_N)_i S_i$  a força concentrada equivalente em cada ponto  $i$ .

No caso discreto, a condição de complementaridade exige que seja satisfeito  $g_N \geq 0$  para todos os pontos candidatos ao contato. A condição  $g_N > 0$  é naturalmente atendida quando os sólidos estão afastados entre si. Resta então a imposição de  $g_N = 0$  para garantir a restrição de contato. As duas formas mais comuns de impor essa restrição é com o emprego do Método da Penalização ou do Método dos Multiplicadores de Lagrange. A parcela de energia devido ao Método dos Multiplicadores de Lagrange é definida como:

$$\Pi_c = \sum_{i=1}^N (\lambda_N)_i (g_N)_i \quad (7.6)$$

sendo  $(\lambda_N)_i$  o multiplicador de Lagrange associado o ponto  $i$ .

Observa-se que as Equações (7.6) e (7.5) são semelhantes, e permite verificar que o multiplicador de Lagrange possui o significado físico de força de contato. Nesse método, a restrição é imposta em forma forte, sendo atendida de forma exata em cada ponto  $i$  após a obtenção do equilíbrio. Uma desvantagem da aplicação deste método é o aumento no número de graus de liberdade no problema, tendo em vista que  $\lambda_i$  passa a ser incógnita do sistema.

No Método da Penalização, a restrição é imposta de forma aproximada. Matematicamente, a parcela de energia associada ao método é definida como:

$$\Pi_c = \sum_{i=1}^N \frac{(\epsilon_N)_i}{2} (g_N)_i^2 \quad (7.7)$$

sendo  $(\epsilon_N)_i$  o parâmetro de penalização associado ao ponto  $i$ .

A Equação (7.7) pode ser interpretada como energia potencial de uma mola que atua em cada ponto  $i$ . Dessa forma, a restrição é melhor satisfeita quanto maior o valor de penalização  $(\epsilon_N)_i$  adotado. No entanto, valores elevados de  $(\epsilon_N)_i$  podem tornar a matriz do sistema mal-condicionada, dificultando a busca pelo ponto de equilíbrio.

No presente trabalho foram empregados ambos os métodos de restrição para estratégia de contato denominada nó-a-superfície. Essa estratégia será descrita em detalhes na próxima seção.

## 7.1 Contato nó-a-superfície

Diversos trabalhos apresentam formulações de contato do tipo nó-a-superfície, entre eles pode-se citar [Simo, Wriggers e Taylor \(1985\)](#), [Wriggers, Van e Stein \(1990\)](#), [Bandeira, Wriggers e Pimenta \(2004\)](#) e [Gay Neto e Wriggers \(2019\)](#). Toda formulação apresentada nessa seção é baseada em [Wriggers \(2006\)](#).

Entre as duas superfícies que entram em contato, escolhe-se apenas uma para a definição dos pontos candidatos ao contato, denominados pontos projéteis. A outra

superfície é denominada alvo e um ponto projétil pode entrar em contato com qualquer ponto no interior desta superfície, não necessariamente com um nó da discretização.

No presente trabalho, limita-se à realização do contato sem atrito. Nesse contexto, é de interesse apenas a avaliação da interação de contato normal à superfície. Portanto, surge a necessidade da determinação da projeção ortogonal do ponto projétil sobre a superfície alvo. Essa projeção é, de modo geral, realizada por meio de um procedimento iterativo. Nesse procedimento, para cada ponto projétil, verifica-se em cada um dos elementos finitos da superfície alvo se o ponto de projeção ortogonal está contido no elemento.

O procedimento de determinação da projeção ortogonal, denominado busca local, pode ser custoso do ponto de vista computacional, tendo em vista a quantidade de processos iterativos a serem realizados em cada iteração da busca pelo ponto de equilíbrio. Assim, realiza-se inicialmente uma busca global, que serve para filtrar os possíveis pontos que entrarão em contato com a superfície alvo em um determinado passo incremental. A partir dessa filtragem, o número de buscas locais é reduzido, otimizando o custo computacional. As estratégias de busca global e local estão descritas nas próximas subseções.

### 7.1.1 Busca global pelo ponto de contato

A busca global é realizada apenas no início de cada passo incremental e serve para eleger os possíveis pontos projéteis a entrarem em contato com a superfície alvo. Essa busca é realizada apenas por meio da determinação de distâncias, que gera um custo computacional baixo. Apenas para os pontos projéteis elegíveis é realizada uma busca local. Portanto, essa etapa de busca global visa minimizar a quantidade de buscas locais a serem realizadas, otimizando-se assim o custo computacional.

O procedimento aqui utilizado para a busca global se fundamenta na definição de um critério baseado na distância entre cada ponto projétil e cada elemento finito da superfície alvo. Para o elemento finito, define-se uma esfera centrada no centro de gravidade do elemento e com raio suficiente para que todo o elemento esteja contido no interior da esfera. Assim, o ponto projétil que se situar no interior da esfera associada a um determinado elemento finito é elegido para a realização da busca local para o referido elemento.

De modo a simplificar o cálculo, toma-se o centro da esfera a partir do centroide do elemento finito no espaço paramétrico. Este ponto nem sempre coincidirá com o centroide do elemento finito no espaço físico, mas constitui boa aproximação para elementos poucos distorcidos. Denotando a máxima distância entre o centroide e cada um dos vértices do elemento finito no espaço físico como  $d_{\max}$ , o raio da esfera pode ser expresso como:

$$r_{\text{esf}} = \vartheta d_{\max} \quad (7.8)$$



sendo  $\vartheta$  um fator ampliador do raio, aqui adotado como  $\vartheta = 1,5$ .

Portanto, um ponto projétil  $P$  será considerado elegível para busca local quando atender ao seguinte critério:

$$d_P < r_{\text{esf}} \quad (7.9)$$

sendo  $d_P$  a distância do ponto  $P$  ao centro da esfera.

### 7.1.2 Busca local pelo ponto de contato

A busca local é realizada por meio de um procedimento iterativo que objetiva encontrar o ponto sobre a superfície alvo situado à mínima distância do ponto projétil. Inicialmente, retoma-se a definição do vetor  $\mathbf{g}$ , escrevendo a posição  $\mathbf{y}^1$  em função das posições nodais do elemento finito no qual o ponto está contido. Assim, escreve-se:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{y}^2 - \mathbf{y}^1(\boldsymbol{\xi}) \quad (7.10)$$

em que  $\mathbf{y}^1(\boldsymbol{\xi}) = \phi^k(\boldsymbol{\xi})\bar{\mathbf{y}}^k$ , sendo  $\bar{\mathbf{y}}^k$  a posição do nó  $k$  do elemento finito que contém o ponto alvo, e  $\mathbf{y}^2$  é a posição de um nó projétil. O ponto de contato no elemento finito da superfície alvo é caracterizado pelo vetor de coordenadas paramétricas  $\boldsymbol{\xi}$ .

O ponto de mínima distância pode ser obtido a partir da minimização do seguinte potencial quadrático:

$$\Phi = \frac{1}{2} \|\mathbf{g}\|^2 = \frac{1}{2} \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \quad (7.11)$$

A mínima distância é obtida para uma determinada configuração fixa, isto é,  $\mathbf{y}^2$  e  $\bar{\mathbf{y}}^k$  são fixados. Assim, a minimização é realizada apenas com relação à variável  $\boldsymbol{\xi}$ , resultando:

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi_j} \delta\xi_j = \left( \mathbf{g} \cdot \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\xi_j} \right) \delta\xi_j = \left( -\mathbf{g} \cdot \frac{\partial\mathbf{y}^1}{\partial\xi_j} \right) \delta\xi_j = (-\mathbf{g} \cdot \mathbf{t}^j) \delta\xi_j = 0 \quad (7.12)$$

em que  $\mathbf{t}^j$  com  $j = 1, 2$  são vetores tangentes no ponto de coordenadas paramétricas  $\boldsymbol{\xi}$  da superfície alvo.

Portanto, para um dado vetor de coordenadas adimensionais  $\boldsymbol{\xi}$  tentativa, o seguinte resíduo pode ser escrito:

$$r_j(\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{t}^j(\boldsymbol{\xi}) \quad (7.13)$$

A anulação do resíduo da Equação (7.13) indica que o ponto de mínima distância corresponde à projeção ortogonal do ponto projétil sobre a superfície alvo. Sendo assim,  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$  resulta paralelo ao versor normal calculado em  $\boldsymbol{\xi}$  quando  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$ .

Para a obtenção do vetor  $\boldsymbol{\xi}$  tal que o resíduo  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})$  resulte no vetor nulo, emprega-se o método de Newton-Raphson. Expandindo o resíduo em série de Taylor, obtém-se:

$$\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi} + \Delta\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} \Delta \xi_j + \mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0} \quad (7.14)$$

em que  $\mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{\xi})$  contém os termos de ordem superior em  $\Delta\boldsymbol{\xi}$ .

Desprezando os termos de ordem superior na Equação (7.14), a correção  $\Delta\boldsymbol{\xi}$  é determinada como:

$$\Delta\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{M}^{-1}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}) \quad (7.15)$$

sendo  $\mathbf{M}$  uma matriz  $2 \times 2$  simétrica expressa em notação indicial como:

$$M_{jk}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial r_j(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} = a_{jk}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \bar{\mathbf{t}}^{jk}(\boldsymbol{\xi}) \quad (7.16)$$

em que:

$$a_{jk}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{t}^j(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{t}^k(\boldsymbol{\xi}) \quad (7.17)$$

$$\bar{\mathbf{t}}^{jk}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{t}^j(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} = \frac{\partial^2 \phi^m(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \bar{\mathbf{y}}^m \quad (7.18)$$

Segundo terminologia da geometria diferencial de superfícies,  $a_{jk}$  representa as componentes do tensor métrico, denominadas componentes covariantes (WRIGGERS, 2006).

Resolvendo-se o sistema da Equação (7.15), aplica-se a correção:  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi} + \Delta\boldsymbol{\xi}$ . Com o novo vetor  $\boldsymbol{\xi}$ , verifica-se o resíduo, Equação (7.13), e determina-se a nova correção via Equação (7.15). Repete-se então o procedimento até que a norma do resíduo  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi})$  e/ou da correção  $\Delta\boldsymbol{\xi}$  resultem menores que uma tolerância pré-estabelecida.

Após encontrado o ponto de projeção, deve-se verificar a ocorrência de contato. Antes de ocorrer o contato, o vetor  $\mathbf{g}$  e o vetor normal ao elemento finito alvo  $\mathbf{n}$  calculado no ponto de projeção possuem o mesmo sentido e, portanto,  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = g_N > 0$ . Caso seja observado  $g_N \leq 0$ , o contato deve ser ativado para se garantir  $g_N = 0$ .

### 7.1.3 Obtenção da forma fraca - Método da Penalização

Para contato sem atrito, é de interesse apenas a componente na direção normal do *gap*. Nesse sentido, para a aplicação da condição de contato via penalização, adiciona-se a seguinte parcela, referente a um ponto projétil, ao funcional de energia:

$$\Pi_c = \frac{\epsilon_N}{2} (g_N)^2 \quad (7.19)$$

em que  $\epsilon_N$  é o fator de penalização para um ponto projétil.

A primeira variação do potencial  $\Pi_c$  é inicialmente escrita em notação indicial como:

$$\delta\Pi_c = \epsilon_N g_N \delta g_N \quad (7.20)$$

A variação  $\delta g_N$  pode ser escrita como:

$$\delta g_N = \delta(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{g} + \mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{g} + g_N \mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{n} \quad (7.21)$$

Como o vetor normal  $\mathbf{n}$  é, por definição, unitário, tem-se que  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ . Logo, obtém-se a seguinte identidade:  $\delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 2(\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{n}) = 0$ . Portanto, a última parcela da Equação (7.21) se anula. A variação  $\delta\mathbf{g}$  é obtida como:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{g} &= \delta\mathbf{y}^2 - \frac{\partial\mathbf{y}^1}{\partial\bar{y}_\alpha^\beta} \delta\bar{y}_\alpha^\beta - \frac{\partial\mathbf{y}^1}{\partial\xi_j} \delta\xi_j \\ &= \delta\mathbf{y}^2 - \phi^\beta \delta\bar{\mathbf{y}}^\beta - \mathbf{t}^j \delta\xi_j \end{aligned} \quad (7.22)$$

em que a variação  $\delta\xi_j$  não é independente e precisa ser determinada.

Ao substituir a Equação (7.22) na (7.21) e aplicar a identidade  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^j = 0^j$ , a variação  $\delta g_N$  se simplifica como:

$$\delta g_N = (\delta\mathbf{y}^2 - \phi^\beta \delta\bar{\mathbf{y}}^\beta) \cdot \mathbf{n} \quad (7.23)$$

Assim, pode-se escrever a primeira variação  $\delta\Pi_c$  como:

$$\delta\Pi_c = \epsilon_N g_N (\delta\mathbf{y}^2 - \phi^\beta \delta\bar{\mathbf{y}}^\beta) \cdot \mathbf{n} = \epsilon_N (\delta\mathbf{y}^2 - \phi^\beta \delta\bar{\mathbf{y}}^\beta) \cdot \mathbf{g} \quad (7.24)$$

ou, na forma matricial:

$$\delta\Pi_c = \left\{ \delta y_\alpha^2 \quad \delta\bar{y}_\alpha^\beta \right\} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_N g_\alpha \\ -\epsilon_N g_\alpha \phi^\beta \end{array} \right\} = \delta\Upsilon^T \mathbf{f}_c^{int} \quad (7.25)$$

#### 7.1.4 Linearização da forma fraca - Método da Penalização

A partir da Equação (7.20), escreve-se a linearização de  $\delta\Pi_c$ :

$$\Delta\delta\Pi_c = \epsilon_N \delta g_N \Delta g_N + \epsilon_N g_N \Delta\delta g_N \quad (7.26)$$

sendo  $\Delta g_N$  obtido de forma análoga à Equação (7.23), isto é:

$$\Delta g_N = (\Delta \mathbf{y}^2 - \phi^\theta \Delta \bar{\mathbf{y}}^\theta) \cdot \mathbf{n} \quad (7.27)$$

Resta então a obtenção de  $\Delta \delta g_N$ . Para isso, realiza-se o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= g_N \mathbf{n} \\ \delta \mathbf{g} &= \delta g_N \mathbf{n} + g_N \delta \mathbf{n} \\ \Delta \delta \mathbf{g} &= \Delta \delta g_N \mathbf{n} + \delta g_N \Delta \mathbf{n} + \Delta g_N \delta \mathbf{n} + g_N \Delta \delta \mathbf{n} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (7.28) pelo versor normal  $\mathbf{n}$  e aplicando as identidades  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ ,  $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{n} = 0$  e  $\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n} = 0$ , a linearização  $\Delta \delta g_N$  resulta em:

$$\Delta \delta g_N = \Delta \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} - g_N \mathbf{n} \cdot \Delta \delta \mathbf{n} \quad (7.29)$$

Sabendo que  $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{n} = 0$ , pode-se fazer  $\Delta(\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{n}) = \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \Delta \delta \mathbf{n} = 0$ . Assim, obtém-se a identidade  $\mathbf{n} \cdot \Delta \delta \mathbf{n} = -\delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n}$  que, aplicada na Equação (7.29), permite escrever:

$$\Delta \delta g_N = \Delta \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} + g_N \delta \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{n} \quad (7.30)$$

O termo  $\Delta \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$  pode ser obtido a partir da variação completa  $\delta \mathbf{g}$  fornecida pela Equação (7.22). Assim, realiza-se o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned} \Delta \delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} &= \Delta(\delta \mathbf{y}^2 - \phi^\beta \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta - \mathbf{t}^j \delta \xi_j) \cdot \mathbf{n} \\ &= - \left( \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_k} \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta \Delta \xi_k + \frac{\partial \mathbf{t}^j}{\partial \bar{y}_\gamma} \delta \xi_j \Delta \bar{y}_\gamma^\theta + \frac{\partial \mathbf{t}^j}{\partial \xi_k} \delta \xi_j \Delta \xi_k + \mathbf{t}^j \Delta \delta \xi_j \right) \cdot \mathbf{n} \\ &= - \left( \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_k} \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta \Delta \xi_k + \frac{\partial \phi^\theta}{\partial \xi_j} \delta \xi_j \Delta \bar{\mathbf{y}}^\theta + \bar{\mathbf{t}}^{jk} \delta \xi_j \Delta \xi_k \right) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Para finalizar a linearização da forma fraca, resta determinar as variações  $\delta \xi_j$ ,  $\Delta \xi_k$ ,  $\delta \mathbf{n}$  e  $\Delta \mathbf{n}$ . A variação  $\delta \mathbf{n}$  pode ser obtida a partir da identidade  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\ell = 0^\ell$ , isto é:

$$\delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\ell = -\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{t}^\ell \quad (7.32)$$

Da identidade  $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{n} = 0$ , conclui-se que o vetor  $\delta \mathbf{n}$  é ortogonal  $\mathbf{n}$  e, portanto, pode ser escrito como combinação linear dos vetores tangentes  $\mathbf{t}^1$  e  $\mathbf{t}^2$ . Assim, faz-se  $\delta \mathbf{n} = c_i \mathbf{t}^i$ , sendo o coeficiente  $c_i$  determinado como segue:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{n} &= c_k \mathbf{t}^k \\ \delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\ell &= c_k \mathbf{t}^k \cdot \mathbf{t}^\ell = c_k a_{k\ell} \\ \delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\ell a_{\ell i}^{-1} &= c_i \end{aligned} \quad (7.33)$$

Portanto, pode-se escrever:

$$\delta \mathbf{n} = c_i \mathbf{t}^i = (\delta \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\ell a_{\ell i}^{-1}) \mathbf{t}^i = -(\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{t}^\ell) a_{\ell i}^{-1} \mathbf{t}^i \quad (7.34)$$

onde na última passagem foi inserida a Equação (7.32).

De modo análogo, obtém-se:

$$\Delta \mathbf{n} = -(\mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{t}^p) a_{pm}^{-1} \mathbf{t}^m \quad (7.35)$$

A variação  $\delta \mathbf{t}^\ell$  é obtida diretamente como:

$$\delta \mathbf{t}^\ell = \frac{\partial \mathbf{t}^\ell}{\partial \bar{y}^\alpha} \delta \bar{y}^\alpha + \frac{\partial \mathbf{t}^\ell}{\partial \xi_j} \delta \xi_j = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_\ell} \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta + \bar{\mathbf{t}}^{\ell j} \delta \xi_j$$

e, analogamente:

$$\Delta \mathbf{t}^\gamma = \frac{\partial \phi^\theta}{\partial \xi_\gamma} \Delta \bar{\mathbf{y}}^\theta + \bar{\mathbf{t}}^{\gamma k} \Delta \xi_k \quad (7.36)$$

Reunindo as expressões obtidas até aqui, escreve-se a linearização  $\Delta \delta g_N$  como:

$$\begin{aligned} \Delta \delta g_N = & - \left( \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_k} \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta \Delta \xi_k + \frac{\partial \phi^\theta}{\partial \xi_j} \delta \xi_j \Delta \bar{\mathbf{y}}^\theta + \bar{\mathbf{t}}^{jk} \delta \xi_j \Delta \xi_k \right) \cdot \mathbf{n} \\ & + g_N \mathbf{n} \cdot \left( \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_\ell} \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta + \bar{\mathbf{t}}^{\ell j} \delta \xi_j \right) a_{\ell p}^{-1} \left( \frac{\partial \phi^\theta}{\partial \xi_p} \Delta \bar{\mathbf{y}}^\theta + \bar{\mathbf{t}}^{pk} \Delta \xi_k \right) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (7.37)$$

Na busca pela variação  $\delta \xi_j$ , determina-se a primeira variação do resíduo  $\mathbf{r}$ , Equação (7.13), da busca pelo ponto de contato. Considerando que ao início de cada iteração do processo de solução da estrutura é realizada a busca local, sempre se tem  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Portanto, a variação total de  $\mathbf{r}$  é nula, isto é,  $\delta \mathbf{r} = \mathbf{0}$ , permitindo escrever:

$$\begin{aligned} \delta r_i = & -\delta \mathbf{g} \cdot \mathbf{t}^i - \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{t}^i \\ = & -(\delta \mathbf{y}^2 - \phi^\beta \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta - \mathbf{t}^j \delta \xi_j) \cdot \mathbf{t}^i - \mathbf{g} \cdot \left( \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_i} \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta + \bar{\mathbf{t}}^{ij} \delta \xi_j \right) \\ = & (a_{ij} - \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{ij}) \delta \xi_j - (\delta \mathbf{y}^2 - \phi^\beta \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta) \cdot \mathbf{t}^i - \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_i} \mathbf{g} \cdot \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta = 0_i \end{aligned} \quad (7.38)$$

o que leva a:

$$\delta \xi_j = M_{j\ell}^{-1} \left[ (\delta \mathbf{y}^2 - \phi^\beta \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta) \cdot \mathbf{t}^\ell + \frac{\partial \phi^\beta}{\partial \xi_\ell} \mathbf{g} \cdot \delta \bar{\mathbf{y}}^\beta \right] \quad (7.39)$$

e, analogamente:

$$\Delta\xi_k = M_{km}^{-1} \left[ (\Delta\mathbf{y}^2 - \phi^\theta \Delta\bar{\mathbf{y}}^\theta) \cdot \mathbf{t}^m + \frac{\partial\phi^\theta}{\partial\xi_m} \mathbf{g} \cdot \Delta\bar{\mathbf{y}}^\theta \right] \quad (7.40)$$

Para facilitar a implementação computacional, organiza-se a linearização da forma fraca conforme a seguinte expressão:

$$\Delta\delta\Pi_c = \left\{ \delta y_\alpha^2 \quad \delta \bar{y}_\alpha^\beta \right\} \begin{bmatrix} H_{\alpha\gamma}^{PP} & H_{\alpha\gamma\theta}^{PA} \\ H_{\alpha\beta\gamma}^{AP} & H_{\alpha\beta\gamma\theta}^{AA} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y_\gamma^2 \\ \Delta \bar{y}_\gamma^\theta \end{Bmatrix} = \delta\mathbf{Y}^T \mathbf{H}_c \Delta\mathbf{Y} \quad (7.41)$$

em que os sobrescritos  $P$  e  $A$  denotam contribuição nos graus de liberdade dos nós projéteis e alvo, respectivamente, e essas contribuições são expressas como:

$$H_{\alpha\gamma}^{PP} = \epsilon_N [n_\alpha n_\gamma + g_N D_{j\alpha} N_{jk} D_{k\gamma}] \quad (7.42a)$$

$$H_{\alpha\gamma\theta}^{PA} = \epsilon_N \left[ -n_\alpha n_\gamma \phi^\theta + g_N (D_{j\alpha} R_{j\gamma\theta} + D_{j\alpha} N_{jk} D_{k\gamma\theta}) \right] \quad (7.42b)$$

$$H_{\alpha\beta\gamma}^{AP} = \epsilon_N \left[ -n_\alpha n_\gamma \phi^\beta + g_N (R_{k\alpha\beta} D_{k\gamma} + D_{j\alpha\beta} N_{jk} D_{k\gamma}) \right] \quad (7.42c)$$

$$H_{\alpha\beta\gamma\theta}^{AA} = \epsilon_N \left[ n_\alpha n_\gamma \phi^\beta \phi^\theta + g_N (T_{\alpha\beta\gamma\theta} + D_{j\alpha\beta} R_{j\gamma\theta} + R_{k\alpha\beta} D_{k\gamma\theta} + D_{j\alpha\beta} N_{jk} D_{k\gamma\theta}) \right] \quad (7.42d)$$

em que:

$$D_{j\alpha} = M_{j\ell}^{-1} t_\alpha^\ell \quad (7.43a)$$

$$D_{j\alpha\beta} = -M_{j\ell}^{-1} \left( t_\alpha^\ell \phi^\beta - g_\alpha \frac{\partial\phi^\beta}{\partial\xi_\ell} \right) \quad (7.43b)$$

$$R_{k\alpha\beta} = -n_\alpha \frac{\partial\phi^\beta}{\partial\xi_k} + g_\alpha \frac{\partial\phi^\beta}{\partial\xi_\ell} a_{\ell p}^{-1} b_{pk} \quad (7.43c)$$

$$N_{jk} = g_N (b_{\ell j} a_{\ell p}^{-1} b_{pk}) - b_{jk} \quad (7.43d)$$

$$T_{\alpha\beta\gamma\theta} = g_N \left( n_\alpha \frac{\partial\phi^\beta}{\partial\xi_\ell} a_{\ell p}^{-1} \frac{\partial\phi^\theta}{\partial\xi_p} n_\gamma \right) \quad (7.43e)$$

sendo  $b_{jk} = \bar{\mathbf{t}}^{jk} \cdot \mathbf{n}$  denominado tensor curvatura.

### 7.1.5 Obtenção da forma fraca - Método dos Multiplicadores de Lagrange

Para um ponto projétil, o potencial de contato considerando o Método dos Multiplicadores de Lagrange é escrito como:

$$\Pi_c = \lambda_N g_N \quad (7.44)$$

em que  $\lambda_N$  é o multiplicador de Lagrange e incógnita do sistema.

A primeira variação de  $\Pi_c$  é então escrita como:

$$\delta\Pi_c = \delta\lambda_N g_N + \lambda_N \delta g_N \quad (7.45)$$

Substituindo a Equação (7.23) na (7.45), obtém-se:

$$\delta\Pi_c = \delta\lambda_N g_N + \lambda_N(\delta\mathbf{y}^2 - \phi^\beta \delta\bar{\mathbf{y}}^\beta) \cdot \mathbf{n} \quad (7.46)$$

ou, na forma matricial:

$$\delta\Pi_c = \left\{ \delta y_\alpha^2 \quad \delta \bar{y}_\alpha^\beta \quad \delta \lambda_N \right\} \begin{Bmatrix} \lambda_N n_\alpha \\ -\lambda_N n_\alpha \phi^\beta \\ g_N \end{Bmatrix} = \delta \Upsilon^T \mathbf{f}_c^{int} \quad (7.47)$$

### 7.1.6 Linearização da forma fraca - Método dos Multiplicadores de Lagrange

A linearização da forma fraca  $\delta\Pi_c$  pode ser inicialmente escrita como:

$$\Delta\delta\Pi_c = \delta\lambda_N \Delta g_N + \Delta\lambda_N \delta g_N + \lambda_N \Delta \delta g_N \quad (7.48)$$

As variações e linearizações presentes na Equação (7.48) são as mesmas já determinadas para o Método da Penalização. Assim, escreve-se a forma final da linearização:

$$\Delta\delta\Pi_c = \left\{ \delta y_\alpha^2 \quad \delta \bar{y}_\alpha^\beta \quad \delta \lambda_N \right\} \begin{bmatrix} H_{\alpha\gamma}^{PP} & H_{\alpha\gamma\theta}^{PA} & n_\alpha \\ H_{\alpha\beta\gamma}^{AP} & H_{\alpha\beta\gamma\theta}^{AA} & -n_\alpha \phi^\beta \\ n_\gamma & -n_\gamma \phi^\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y_\gamma^2 \\ \Delta \bar{y}_\gamma^\theta \\ \Delta \lambda_N \end{Bmatrix} = \delta \Upsilon^T \mathbf{H}_c \Delta \Upsilon \quad (7.49)$$

em que os sobrescritos  $P$  e  $A$  denotam contribuição nos graus de liberdade dos nós projéteis e alvo, respectivamente. Essas contribuições são expressas como:

$$H_{\alpha\gamma}^{PP} = \lambda_N D_{j\alpha} N_{jk} D_{k\gamma} \quad (7.50a)$$

$$H_{\alpha\gamma\theta}^{PA} = \lambda_N (D_{j\alpha} R_{j\gamma\theta} + D_{j\alpha} N_{jk} D_{k\gamma\theta}) \quad (7.50b)$$

$$H_{\alpha\beta\gamma}^{AP} = \lambda_N (R_{k\alpha\beta} D_{k\gamma} + D_{j\alpha\beta} N_{jk} D_{k\gamma}) \quad (7.50c)$$

$$H_{\alpha\beta\gamma\theta}^{AA} = \lambda_N (T_{\alpha\beta\gamma\theta} + D_{j\alpha\beta} R_{j\gamma\theta} + R_{k\alpha\beta} D_{k\gamma\theta} + D_{j\alpha\beta} N_{jk} D_{k\gamma\theta}) \quad (7.50d)$$

As grandezas presentes nas Equações (7.50) são as mesmas apresentadas nas Equações (7.43).

## 7.2 Algoritmo de solução

O problema de contato pertence à classe de problemas de otimização com restrição por inequação. Essa classe de problemas é conhecida pela dificuldade de convergência oriunda do processo de ativação e desativação da restrição ao longo da análise. No algoritmo mais básico, considera-se que a condição de contato é verificada a cada iteração de cada

passo incremental. Sendo assim, podem ocorrer ativação e/ou desativação de pontos de contato para configurações não-equilibradas, prejudicando a taxa de convergência do método de Newton-Raphson.

Nesse contexto, diversos algoritmos já foram elaborados visando melhorar a convergência do processo de solução, conforme descrito em [Wriggers \(2006\)](#). Em problemas lineares, diversos desses algoritmos foram estudados por [Piedade Neto \(2009\)](#), cada um apresentando vantagens e desvantagens para sua utilização. No presente trabalho, emprega-se um algoritmo semelhante ao utilizado em [Piedade Neto \(2013\)](#), descrito no [algoritmo 1](#).

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo para solução do problema de contato

---

```

Realizar busca global;
Definir nós projéteis ativos;
convergado = falso;
enquanto convergado == falso faça
    Realizar busca local com nós ativos;
    Computar matriz hessiana e vetor de resíduo (incluindo restrições de contato);
    Resolver sistema (proveniente de Newton-Raphson ou Arc-Length);
    Verificar critério de convergência;
    se convergado == verdadeiro então
        Verificar se novos nós projéteis penetraram ( $g_N \leq 0$ );
        se  $g_N \leq 0$  então
            Marcar nó como ativo;
            convergado = falso;
        fim
        Verificar se ocorreu força de tração nos nós ativos ( $f_N > 0$ );
        se  $f_N > 0$  então
            Marcar nó como inativo;
            convergado = falso;
        fim
    fim
fim

```

---

Para aplicação do [algoritmo 1](#), são definidos os chamados nós projéteis ativos e inativos. Ao início de cada passo incremental são determinados os nós ativos, para os quais a restrição de contato deve ser imposta durante todas as iterações. Após a convergência, é verificado se há novos nós a serem classificados como ativos e se há algum nó ativo que precise ser desativado. Caso não ocorra nenhuma dessas duas situações, a configuração de equilíbrio foi obtida. Caso contrário, realiza-se novas iterações com as novas condições até a convergência. Ressalta-se aqui que o [algoritmo 1](#) descreve o procedimento a ser realizado dentro de um passo incremental.

Nota-se então que, como não há alteração das condições de contato entre iterações, a convergência do processo de solução não é mais prejudicada por esse fator. Entretanto, pode ocorrer de um nó projétil ativo trocar de elemento alvo de uma iteração para outra.



Como a interface entre elementos finitos não possui, em geral, o grau de continuidade exigido pela formulação, esse pode ser mais um fator para prejudicar a convergência. Um problema comum nessas situações é o chamado efeito *jamming* (ou *zig-zagging*), conhecido na literatura de otimização (WRIGGERS, 2006). Esse efeito é caracterizado quando o processo de solução em consecutivas iterações salta indefinidamente entre dois valores, não encontrando convergência. De acordo com Wriggers (2006), uma possibilidade para evitar esse problema é o emprego do método dos conjuntos ativos, que propõe nova estratégia para alterações das condições de contato dentro do processo iterativo.

No presente trabalho, limita-se ao emprego do algoritmo 1 para aplicação do contato. Por não fazer parte do escopo principal do presente trabalho, as demais especificidades intrínsecas ao problema de contato não serão tratadas.

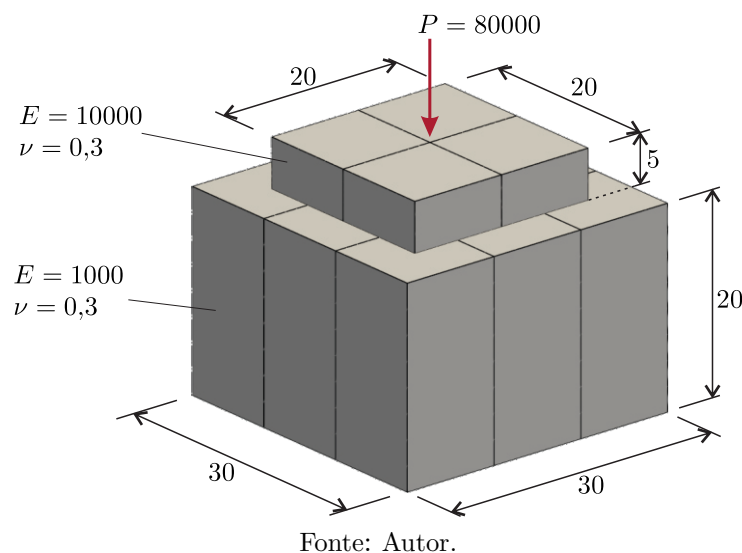
### 7.3 Exemplo numérico de validação

Nessa seção é apresentado um exemplo numérico com o intuito de validar a formulação de contato aqui apresentada.

#### 7.3.1 Contato entre dois blocos

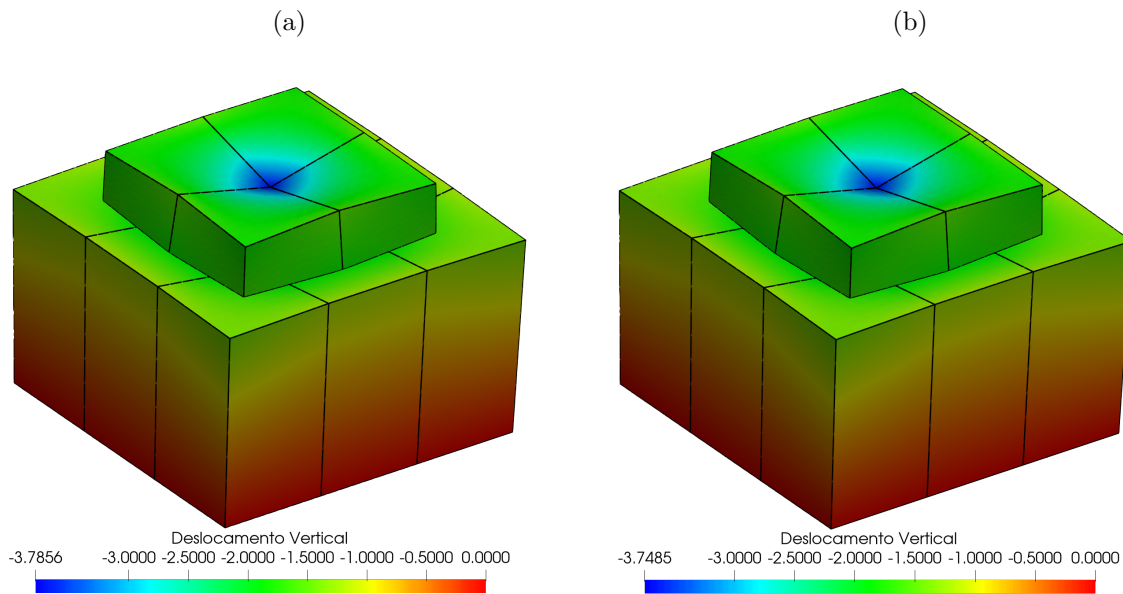
Este exemplo foi elaborado por Parisch (1989) com o intuito principal de verificar a taxa de convergência do método de Newton-Raphson quando se utiliza a linearização consistente da forma fraca. O exemplo consiste de dois blocos alinhados em contato, sendo um deles submetido a uma força concentrada, conforme Figura 63. O bloco inferior está engastado em sua base, enquanto o bloco superior possui restrições apenas para evitar deslocamentos de corpo rígido.

Figura 63 – Dois blocos em situação de contato.



A força concentrada foi aplicada de forma incremental em 4 passos. A discretização empregada é exatamente a apresentada sobre a geometria da Figura 63, consistindo de elementos hexaédricos isoparamétricos com aproximação linear. Essa foi a mesma discretização empregada em Parisch (1989). A análise de contato é aqui realizada com o Método da Penalização, adotando-se  $\epsilon_N = 10^6$ , e com o Método dos Multiplicadores de Lagrange. A configuração da estrutura ao final da análise está apresentada na Figura 64.

Figura 64 – Configuração final da estrutura: (a) Método da Penalização e (b) Método dos Multiplicadores de Lagrange.



Fonte: Autor.

Em Parisch (1989), o deslocamento final no ponto de aplicação da força foi de 3,05. Na presente análise, foram obtidos os valores de 3,79 e 3,75 para os métodos da Penalização e dos Multiplicadores de Lagrange, respectivamente. A diferença entre os valores aqui obtidos e o valor de referência pode ser explicada pelo uso de diferentes leis constitutivas para o elemento finito de sólido, já que a restrição de contato foi corretamente atendida.

Em termos de convergência do processo de solução, em cada um dos quatro passos da análise foram observadas apenas 5 iterações para ambos os métodos de restrição, considerando tolerância de  $10^{-13}$  na norma de deslocamentos ( $\|\Delta\mathbf{y}\|/\|\mathbf{x}\|$ ). Na última iteração de cada passo observou-se para os métodos da Penalização e dos Multiplicadores de Lagrange valores residuais na ordem de  $10^{-14}$  e  $10^{-16}$ , respectivamente, para a norma de deslocamentos e de  $10^{-8}$  e  $10^{-10}$ , respectivamente, para a norma do vetor resíduo.

É de interesse também observar o valor máximo do *gap* ao final da análise. O valor máximo ocorreu no nó central da interface de contato e resultou em  $|g_N| = 0,0529768$  para o Método da Penalização e da ordem de  $10^{-15}$  para o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Em termos de força de contato, para esse mesmo ponto observa-se  $|f_N| = \epsilon_N |g_N| = 52976,8$  para o Método da Penalização e  $|f_N| = |\lambda_N| = 53615,1$  para o Método dos Multiplicadores

de Lagrange. Esses valores de força de contato são da mesma ordem de grandeza, conforme esperado. Valores mais próximos devem ser obtidos para um valor maior do coeficiente de penalização.

Para esse exemplo, coeficientes de penalização a partir de  $10^7$  começam a prejudicar a convergência do Método de Newton-Raphson, indicando mal-condicionamento da matriz do sistema.

Desses resultados, conclui-se que a implementação da formulação de contato foi realizada adequadamente. Pode-se observar também uma ótima taxa de convergência para a solução. Além do emprego da linearização exata da forma fraca, a convergência é adicionalmente justificada pelo fato de nenhum nó projétil ter trocado de elemento alvo, visto que os deslizamentos não foram significativos.



## CAPÍTULO 8

### EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Nesse capítulo são propostos alguns exemplos para avaliar o colapso de estruturas. Cabe mencionar que, embora os problemas discutidos possam representar situações idealizadas, o foco neste capítulo é realizar análises de estruturas de maior porte e combinar os efeitos dos diversos desenvolvimentos apresentados nesta tese.

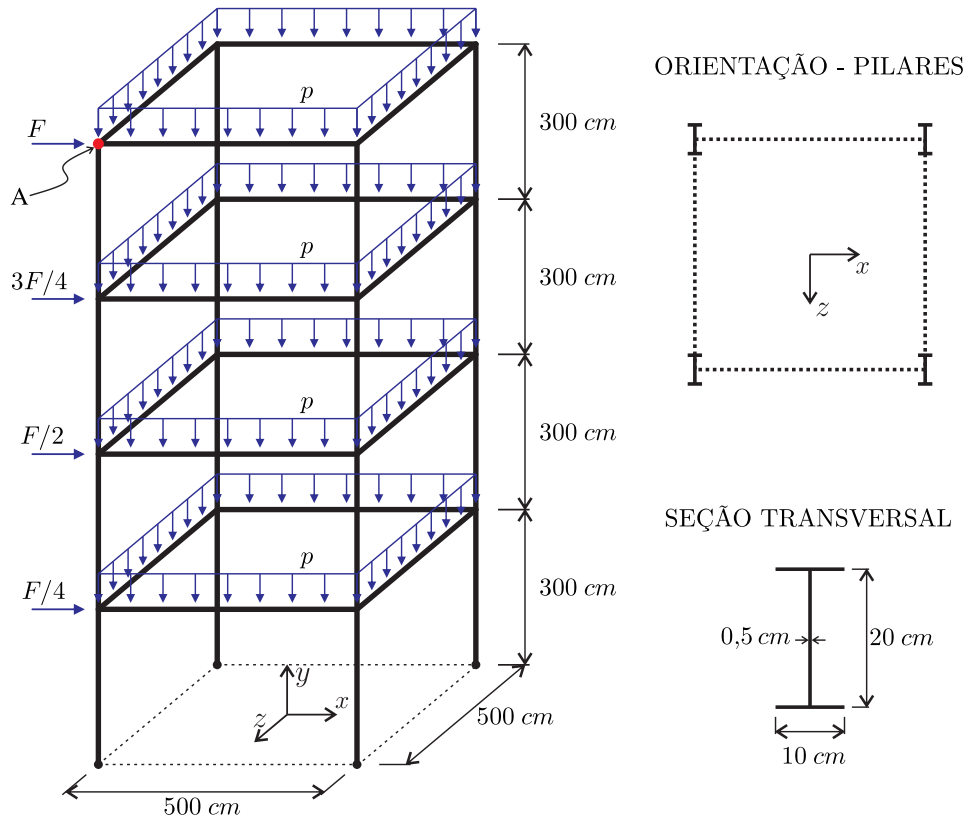
#### 8.1 Pórtico tridimensional elastoplástico

Este exemplo trata da análise elastoplástica de um pórtico que representa a estrutura de um edifício de 4 pavimentos, conforme apresentado na [Figura 65](#). A estrutura é composta por perfis metálicos, sendo o material com as seguintes propriedades:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $S_Y = 250 \text{ MPa}$ ,  $K = 21 \text{ GPa}$  e  $H = 0$ . Os deslocamentos de todos os nós da cota  $y = 0$  são restritos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . São aplicadas forças horizontais de tal forma a gerar torção na edificação, conforme [Figura 65](#), em que  $F = 1,0\lambda \text{ kN}$ , sendo  $\lambda$  o fator de carga. São aplicadas também forças distribuídas de intensidade  $p = 0,1\lambda \text{ kN/m}$  em todas as vigas.

A conexão entre os elementos estruturais é modelada conforme esquema apresentado na [Figura 66](#), em que os elementos de treliça possuem rigidez fornecida pela Equação (5.33). As vigas e os pilares são discretizados em elementos finitos de casca. Pressupondo que os pilares sofrerão mais deformações ao longo da análise, realiza-se para os mesmos uma discretização mais refinada, resultando em 10 elementos finitos triangulares cúbicos ao longo do comprimento. Para as vigas, emprega-se uma discretização em 5 elementos finitos ao longo do seu comprimento. Ao longo da seção transversal, 2 elementos finitos são utilizados para discretizar cada mesa e a alma do perfil. Ao todo, a discretização resulta em 102996 graus de liberdade.

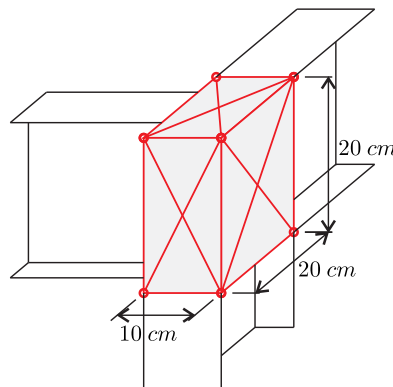
Os fatores de carga crítica obtidos a partir de uma análise linear de estabilidade estão apresentados na [Tabela 13](#).

Figura 65 – Esquema estático e dimensões de interesse do pórtico tridimensional.



Fonte: Autor.

Figura 66 – Elemento de conexão viga-pilar.



Fonte: Autor.

Tabela 13 – Fatores de carga crítica ( $\lambda_{cr}$ ) para o pórtico tridimensional.

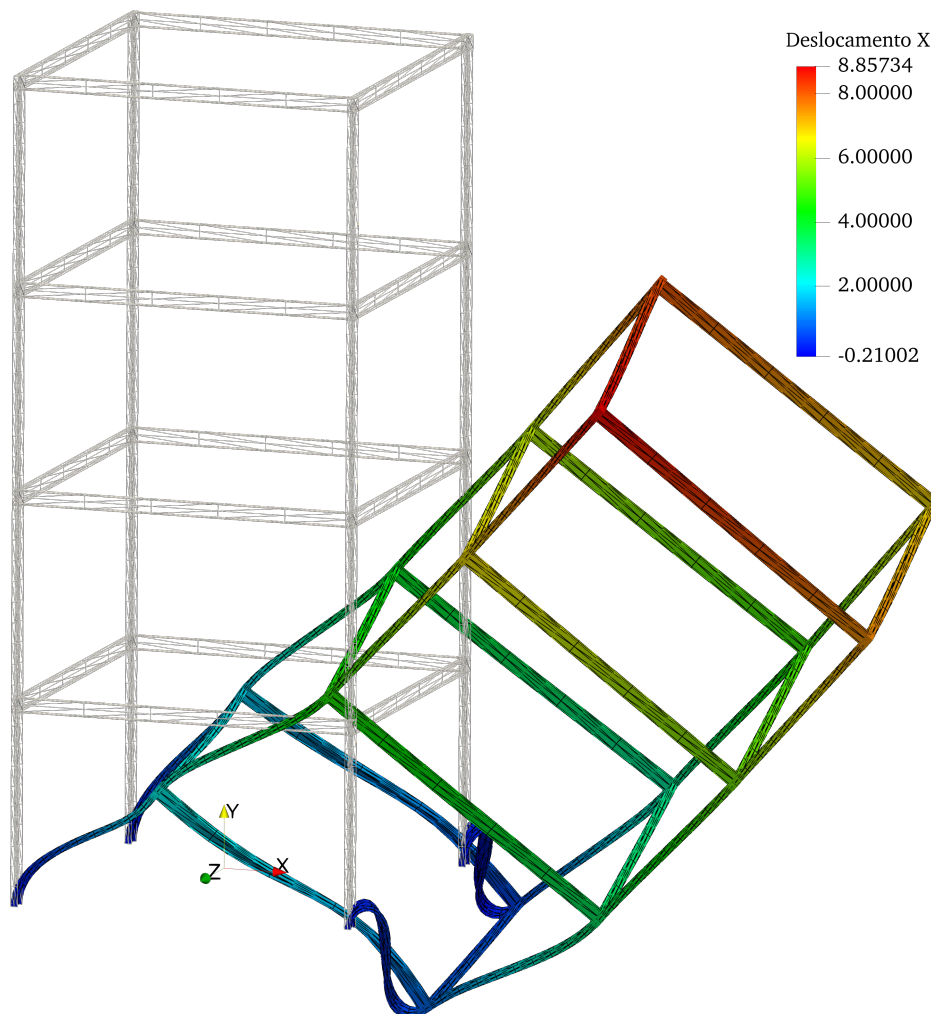
Modo	Carga crítica ( $\lambda_{cr}$ )
1	26,1936
2	28,8583
3	37,9672
4	49,0198
5	53,3133

Fonte: Autor.

## 8.1.1 Análise estática

Para a determinação da trajetória de equilíbrio da estrutura, foi utilizado o Método do comprimento de arco com fator de carga inicial  $\Delta\lambda_0 = 0,5$  e 500 passos. O arco é determinado na primeira iteração do primeiro passo pelas Equações (4.2) e (4.3) e é mantido constante ao longo do restante da análise. A configuração final da estrutura para o passo 500, correspondente a  $\lambda = 5,69$ , está apresentada na Figura 67.

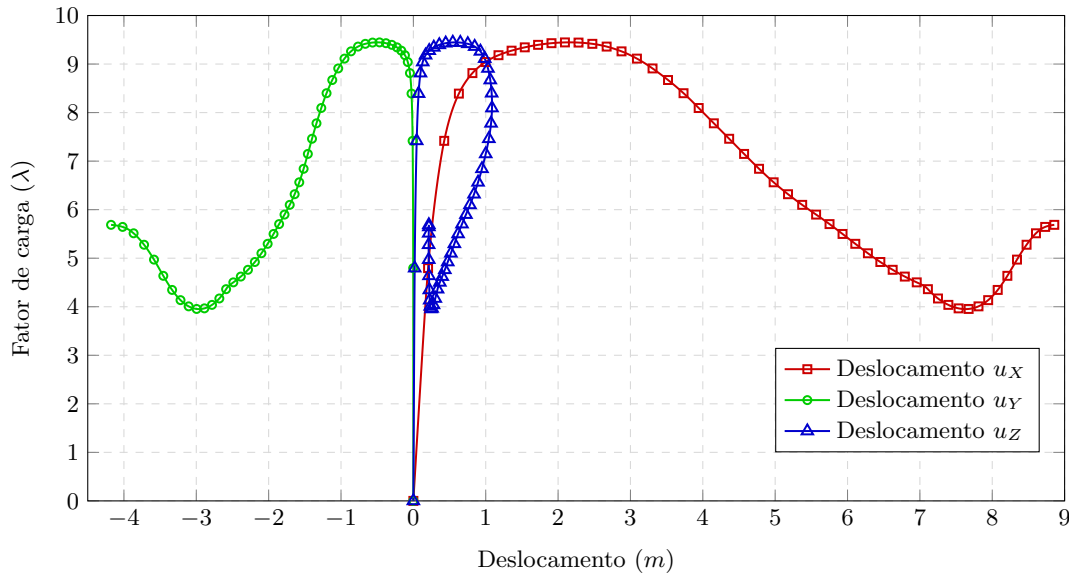
Figura 67 – Pórtico tridimensional elastoplástico - configuração deformada.



Fonte: Autor.

São obtidas também as trajetórias de equilíbrio em deslocamentos para o ponto A (Figura 65). As trajetórias estão apresentadas na Figura 68. O fator de carga máximo observado na figura corresponde a  $\lambda_{max} = 9,45$ , sendo 64% menor que a carga crítica do modo 1 indicada na Tabela 13. Além do efeito da não-linearidade geométrica, a plastificação do material também pode explicar essa redução no fator de carga crítica. De fato, observa-se que o início da plastificação ocorreu no passo 7 da análise, para  $\lambda = 3,44$ , correspondente a 36% de  $\lambda_{max}$ .

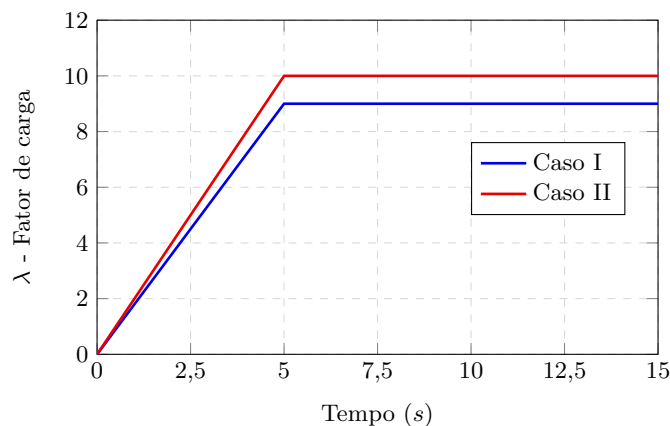
Figura 68 – Trajetórias de equilíbrio do ponto A (ver Figura 65).



### 8.1.2 Análise dinâmica

Com base na análise estática, consideram-se duas situações de carregamento para a análise dinâmica. No Caso I, considera-se um fator de carga crescente com valor final  $\lambda = 9,0$ , valor inferior à carga crítica determinada na análise estática. No Caso II, considera-se também um fator de carga crescente, agora com valor final  $\lambda = 10,0$ , superior à carga crítica estática. Ambos os casos de carregamentos estão devidamente definidos na Figura 69. Os parâmetros para a análise dinâmica são:  $\Delta t = 5 \text{ ms}$  e  $\rho_\infty = 0,95$ .

Figura 69 – Casos de carregamento para análise dinâmica do pórtico tridimensional.

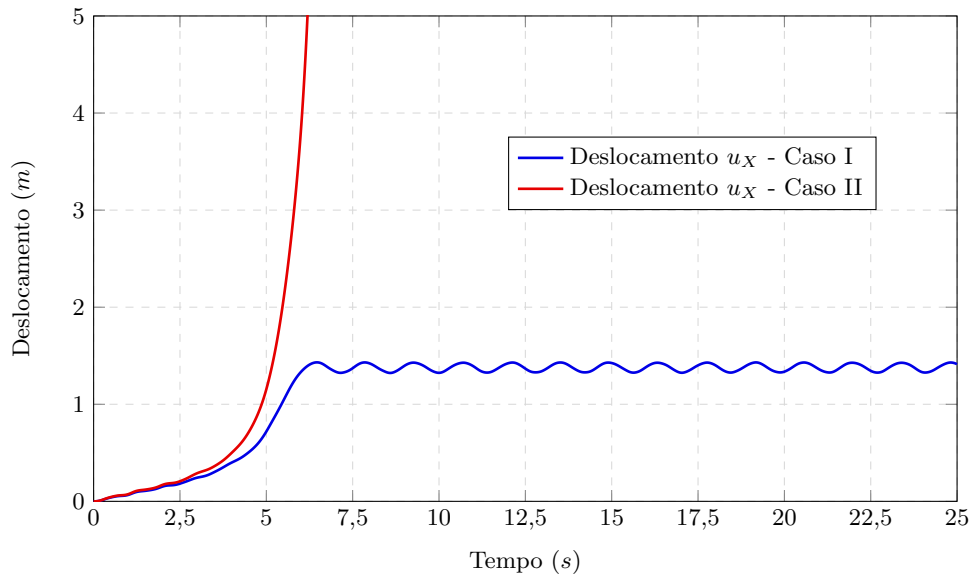


Para cada um dos dois casos de carregamento definidos, uma análise dinâmica foi realizada. Na Figura 70 estão apresentados os gráficos correspondentes ao deslocamento  $u_x$  do ponto A (Figura 65) para os casos I e II de carregamento. A partir dos gráficos,



observa-se a concordância com a análise estática referente ao fator de carga máximo. Para o Caso I observou-se estabilidade da estrutura, em que ocorreu apenas pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio estática. Já no Caso II, observou-se um aumento indefinido dos deslocamentos, indicando a não existência de estabilidade para esse nível de carregamento, conforme previsto na análise estática.

Figura 70 – Deslocamentos obtidos na análise dinâmica do pórtico tridimensional.



Fonte: Autor.

## 8.2 Edifício de dois pavimentos

Neste exemplo procura-se avaliar uma situação de impacto entre pavimentos. Os pilares e vigas são compostos de perfis metálicos de seção transversal indicada na [Figura 71](#) e com as seguintes propriedades de material:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$  e  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ . As lajes possuem espessura de  $15 \text{ cm}$  e material com as seguintes propriedades:  $E = 21 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,2$  e  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ . Os deslocamentos de todos os nós da cota  $y = 0$  são restritos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . São aplicadas forças uniformemente distribuídas nas lajes de intensidade  $p = 0,2 \text{ kN/m}^2$ , mantida constante ao longo do tempo. Para a imposição das restrições de contato/impacto, foi utilizado o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

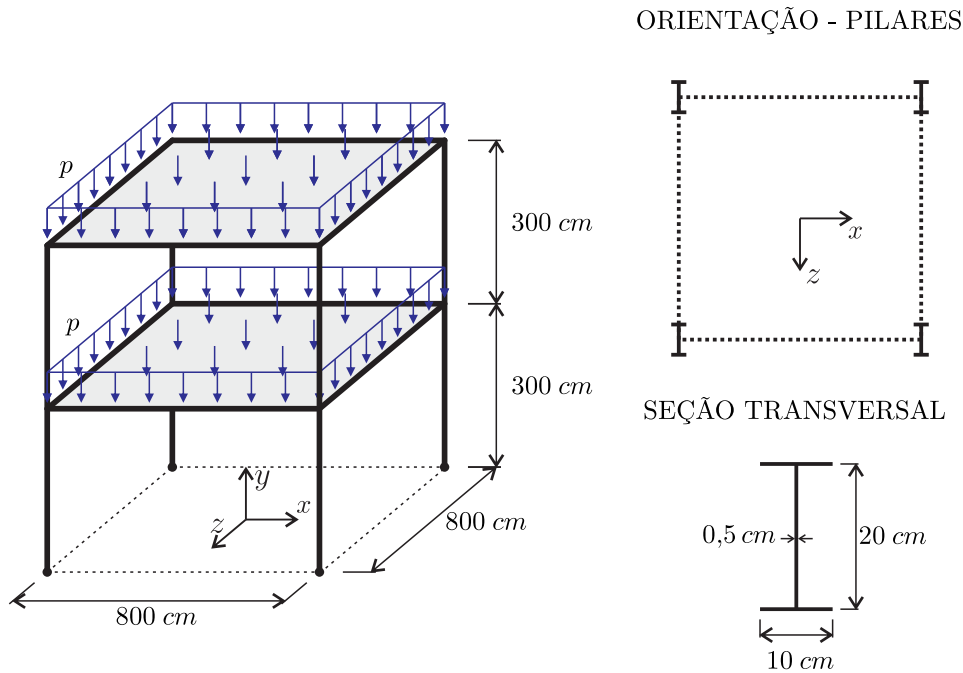
As conexões viga-pilar são realizadas de forma idêntica ao exemplo anterior, conforme [Figura 66](#). As conexões viga-laje são feitas via elemento de conexão, conforme [Figura 72](#), sendo 5 elementos ao longo do comprimento da viga. O módulo de elasticidade adotado para a conexão viga-laje é calculado por equivalência com a rigidez da laje como:

$$E = E_S \left( \frac{h_S}{h} \right)^3 \quad (8.1)$$

sendo  $E_S$  e  $h_S$  o módulo de elasticidade e a espessura da laje, respectivamente, e  $h$  é a espessura do sólido de ligação.

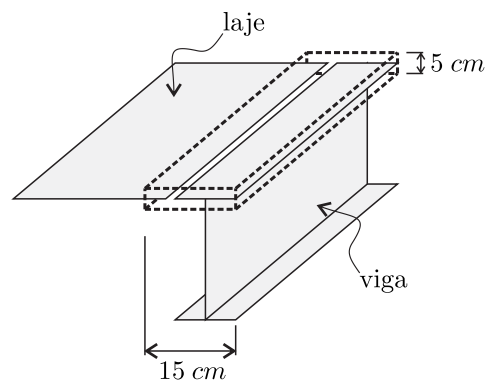
Nas conexões viga-pilar, apenas os graus de liberdade de posições nodais são imersos no sólido de ligação. Nas conexões viga-laje, além da imersão das posições nodais, os vetores generalizados dos nós da laje também são imersos, de modo a garantir continuidade de rigidez à flexão da laje para o sólido de ligação.

Figura 71 – Esquema estático e dimensões de interesse do edifício de dois pavimentos.



Fonte: Autor.

Figura 72 – Elemento de conexão viga-laje (tracejado).



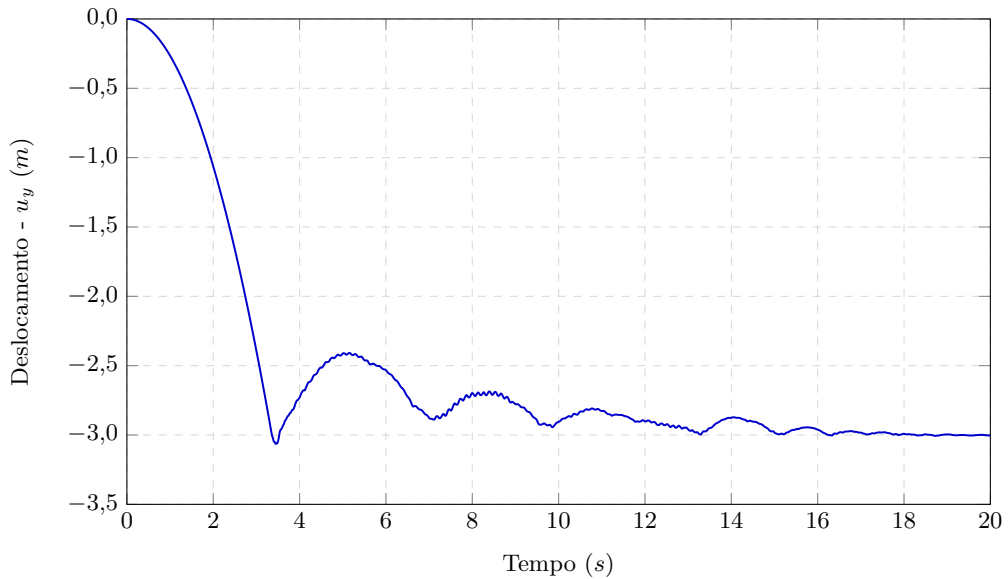
Fonte: Autor.

As discretizações para pilares e vigas seguem as mesmas do exemplo anterior, consistindo de 10 elementos ao longo do comprimento para os pilares, e 5 elementos para as vigas. Na seção transversal, são utilizados 2 elementos finitos para discretizar cada mesa e a alma do perfil. Ao todo, a discretização resulta em 55803 graus de liberdade.

Para avaliar a situação de impacto, realiza-se apenas a análise dinâmica. Além disso, considera-se que a laje do pavimento superior não possui restrições, de modo que o carregamento faça com que a mesma caia sobre a laje do pavimento inferior. Os parâmetros adotados para a análise dinâmica são:  $\Delta t = 10 \text{ ms}$  e  $\rho_\infty = 0,60$ .

Na [Figura 73](#) apresenta-se o deslocamento vertical do ponto central da laje do pavimento superior em função do tempo. Observa-se que a restrição de contato foi devidamente imposta, impedindo a laje superior de atravessar a laje inferior.

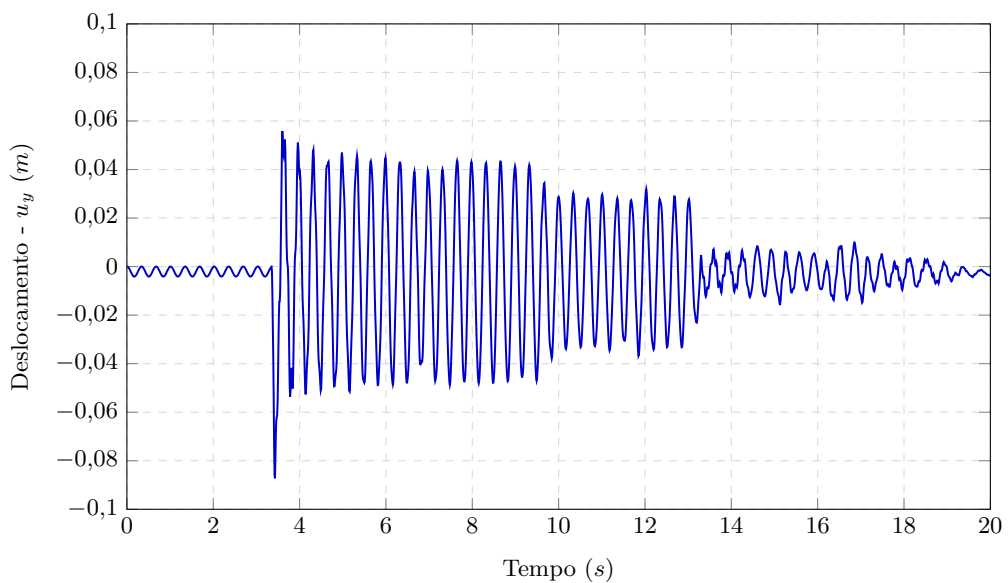
Figura 73 – Deslocamento vertical do ponto central da laje do pavimento superior do edifício.



Fonte: Autor.

Para verificar o efeito do impacto no pavimento inferior, apresenta-se, na [Figura 74](#), o deslocamento vertical do ponto central da laje inferior em função do tempo. No gráfico, pode-se notar a diferença de comportamento que ocorre após o impacto, evidenciando a forte não-linearidade que aparece.

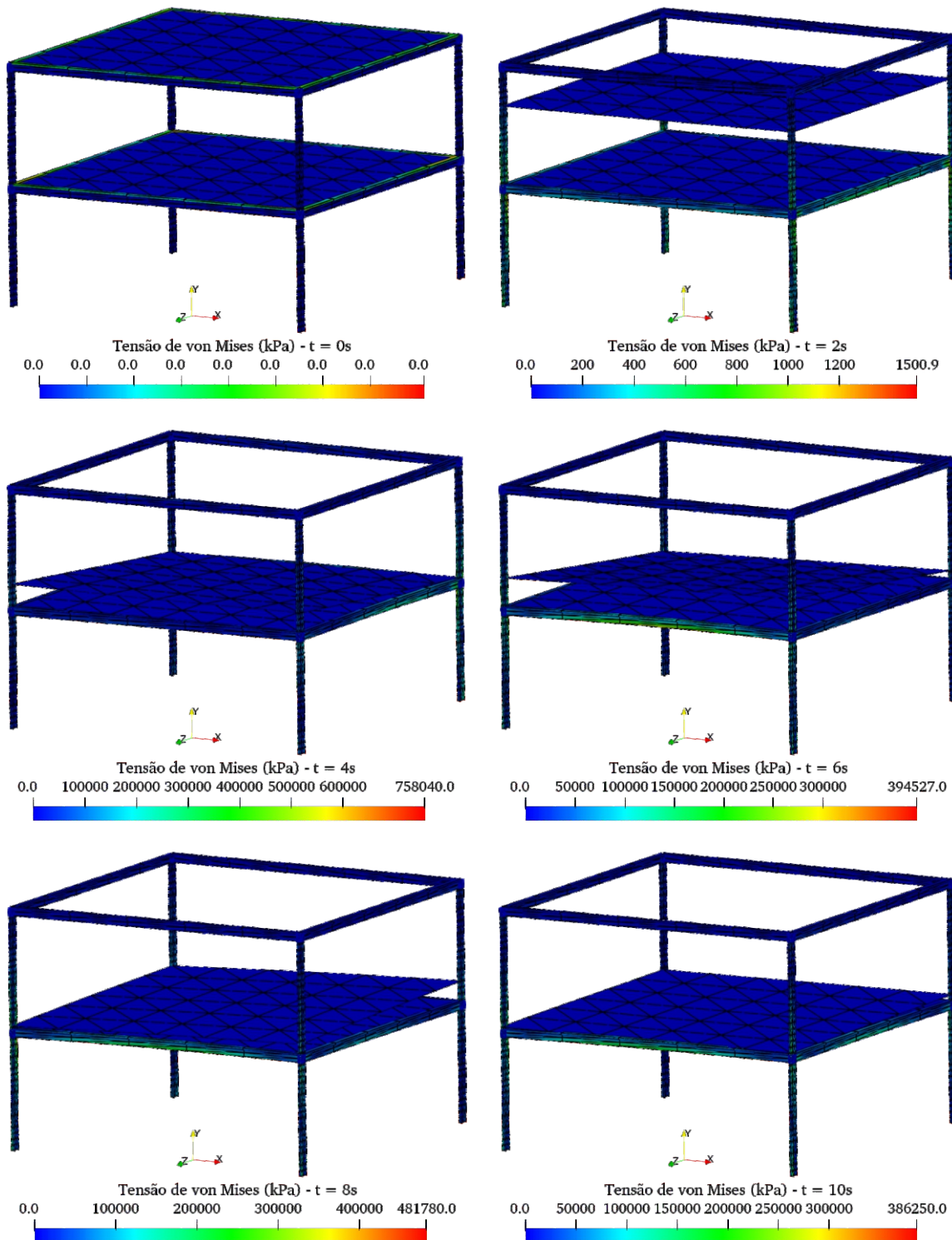
Figura 74 – Deslocamento vertical do ponto central da laje do pavimento inferior do edifício.



Fonte: Autor.

Para ilustrar a movimentação do edifício, na [Figura 75](#) são apresentadas algumas configurações da estrutura ao longo do tempo.

Figura 75 – Configurações do edifício de dois pavimentos em seis instantes selecionados.



Fonte: Autor.

Observa-se neste exemplo que a adoção do raio espectral  $\rho_\infty = 0,60$  causou um amortecimento numérico nas respostas. Para raios espectrais maiores (menor amortecimento), foi notada dificuldade de convergência da solução em decorrência das altas frequências de vibração no instante do impacto. Dessa forma, conclui-se que a adoção de

um valor adequado de raio espectral é importante para a obtenção de soluções numéricas na presença de altas frequências de vibração, como em situações de impacto.

De modo geral, conclui-se, a partir desses últimos exemplos, que a ferramenta computacional aqui desenvolvida permite realizar análises de colapso progressivo. No exemplo da [seção 8.1](#) mostrou-se ser possível representar situações de colapso em decorrência da plastificação de membros estruturais. Já o exemplo da [seção 8.2](#) indica que numa análise de colapso progressivo, o processo de impacto entre os pavimentos pode ser devidamente representado.



## CAPÍTULO 9

### CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo principal a simulação do comportamento mecânico de estruturas compostas por perfis de parede fina em situação de colapso. Nesse contexto, diversos desenvolvimentos foram realizados, inclusive com proposições originais, os quais permitiram a avaliação precisa do comportamento mecânico de tais estruturas. Para a modelagem numérica, foi empregado o Método dos Elementos Finitos em sua abordagem posicional, admitindo como parâmetros nodais básicos posições e vetores generalizados ao invés de deslocamentos e giros. Como já conhecido de trabalhos anteriores do grupo de pesquisa, esta formulação possui uma vantagem evidente na descrição de grandes rotações, já que a utilização de vetores generalizados para tal descrição torna dispensável a adoção de estratégias para a resolução do problema de não-comutatividade de giros finitos no espaço tridimensional. Além disso, a adoção de vetores generalizados ao invés de giros permite que a descrição Lagrangiana Total do equilíbrio possa ser naturalmente empregada.

As estruturas de parede fina são conhecidas por serem mais suscetíveis a fenômenos de instabilidade, de modo que as trajetórias de equilíbrio considerando o desenvolvimento de grandes deslocamentos podem se tornar mais complexas. Assim, torna-se dificultada a obtenção dessas trajetórias. Nesse sentido, foi empregada a estratégia do comprimento de arco, na qual o fator de carga se torna variável adicional do problema. Nesta estratégia, uma equação adicional de restrição do espaço de soluções é considerada, permitindo a determinação natural de trechos estáveis e instáveis da trajetória de equilíbrio. Além disso, foi desenvolvida uma estratégia de escolha de qual trajetória de equilíbrio seguir para além de um ponto de bifurcação. A estratégia consiste na obtenção de uma força de perturbação determinada com base no modo de instabilidade correspondente à trajetória desejada e aplicada na vizinhança do ponto de bifurcação. Dessa forma, consegue-se ultrapassar o ponto de bifurcação e o método de solução segue a trajetória pretendida. Os exemplos numéricos realizados demonstram a aplicabilidade dessa estratégia na determinação de trajetórias de equilíbrio que apresentam bifurcações.

Uma aplicação relevante e difundida dos perfis de parede fina é como elementos estruturais em edificações. No estudo do comportamento mecânico desses edifícios surge a necessidade de modelar as ligações entre os elementos estruturais. Uma modelagem precisa da geometria e dos componentes da ligação pode ser realizada caso se deseje analisar detalhadamente o comportamento mecânico. Todavia, numa análise do comportamento global de uma edificação, modelos mais simplificados de ligação podem ser adotados. No presente trabalho, desenvolveu-se um elemento de conexão capaz de unir dois ou mais membros estruturais sem a necessidade de compatibilizar discretizações. A adoção de uma rigidez elevada para este elemento de conexão permite a modelagem de ligações rígidas. Para a simulação de uma ligação flexível, pode-se anular a rigidez do sólido de conexão e inserir rigidez em planos específicos por meio de elementos de treliça, para os quais determinam-se rigidezes equivalentes em correspondência à rigidez de seus respectivos planos. Os exemplos numéricos de validação demonstram a aplicabilidade desta estratégia evidenciando que uma estratégia de simples aplicação pode ser robusta e conduzir a resultados satisfatórios.

Com o objetivo de simular de forma precisa o fenômeno de colapso estrutural, se faz necessária a incorporação de não-linearidades físicas, como plasticidade do material, e de contato/impacto. Além disso, a movimentação da estrutura na condição de colapso pode tornar os efeitos inerciais significativos, de modo que uma análise dinâmica se torna mais adequada. Nesse sentido, o presente trabalho considerou a presença de materiais elasto-plásticos, para os quais o limite elástico é definido pelo critério de von Mises, sendo este critério adequado para materiais dúcteis, como o aço. Para análise dinâmica, empregou-se para integração temporal o método  $\alpha$ -generalizado, com o qual é possível controlar de forma mais precisa a dissipação numérica, permitindo também um controle melhor da estabilidade numérica do algoritmo. Exemplos de validação para elasto-plasticidade e para análise dinâmica foram realizados e os resultados se mostraram satisfatórios.

Referente à análise de contato/impacto, foi implementada a estratégia nó-a-superfície. Nessa estratégia, em uma das superfícies, denominada projétil, são tomados os nós que podem entrar em contato com qualquer ponto de outra superfície, denominada alvo. Como pode ser notado, essa é uma estratégia simplificada que leva em consideração de forma aproximada as superfícies envolvidas. No entanto, essa estratégia se mostrou suficiente para a obtenção do comportamento mecânico da estrutura em situação de contato, conforme verificado nos exemplos realizados.

De modo geral, a partir dos desenvolvimentos e das implementações realizadas, foi obtida uma ferramenta computacional que possibilita a realização de análises mecânicas de estruturas compostas por perfis de parede delgada. Em particular, possibilita a realização de análises de colapso, tendo em vista a implementação referente à degradação do material por plastificação e também às estratégias numéricas mais eficientes, como a estratégia



do comprimento de arco e o método  $\alpha$ -generalizado. Assim, conclui-se que a ferramenta aqui desenvolvida pode ser utilizada em situações práticas de projeto e de verificação, principalmente de estruturas metálicas.

## 9.1 Sugestões para trabalhos futuros

Uma primeira sugestão para desenvolvimento futuro é a automatização da geração do elemento de conexão casca-sólido. Nesse contexto, sugere-se desenvolver estratégias para geração automática dos planos de treliça imersos e para cálculo automático do valor de rigidez necessário para atribuir a cada barra.

Para a modelagem da degradação do material, sugere-se a adoção de modelos de plasticidade consistentes com o regime de grandes deformações. É interessante também observar a aplicação de leis de evolução mais representativas de acordo com o material empregado. A melhoria nesses aspectos possibilitará previsões mais precisas do processo de colapso estrutural.

Para problemas estruturais em que análises de contato/impacto são relevantes, sugere-se a adoção de um método mais robusto, como o método *mortar*, por exemplo. Algoritmos para identificação e aplicação do contato também merecem atenção, tendo em vista os problemas já conhecidos descritos na literatura de otimização restrita.

Por fim, sugere-se a elaboração de modelos estruturais mais representativos de edificações reais. Sabendo que esses modelos serão maiores e com um número muito maior de graus de liberdade que os exemplos apresentados nessa tese, uma implementação de paralelização em memória distribuída, como o padrão MPI, pode se fazer necessária.



## REFERÊNCIAS

- AGARWAL, A.; VARMA, A. H. Fire induced progressive collapse of steel building structures: The role of interior gravity columns. **Engineering Structures**, v. 58, p. 129–140, 2014.
- ALEMDAR, Z. F.; ALEMDAR, F. Progressive collapse of a steel structure under expected snow loads. **Engineering Failure Analysis**, v. 125, p. 105378, 2021.
- ANSYS®. **Academic Research Mechanical**. [S.l.]: Release 20.2. ANSYS, Inc, 2020.
- BANDEIRA, A. A.; WRIGGERS, P.; PIMENTA, P. de M. Numerical derivation of contact mechanics interface laws using a finite approach for large 3D deformation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, n. 2, p. 173–195, 2004.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT. **Thin-Walled Structures**, v. 46, p. 79–101, 2008.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Torsion warping transmission at thin-walled frame joints: Kinematics, modelling and structural response. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 69, p. 36–53, 2012.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. Post-buckling analysis of thin-walled steel frames using generalised beam theory (GBT). **Thin-Walled Structures**, v. 62, p. 229–242, 2013.
- BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. GBT-based buckling analysis of steel cylindrical shells under combinations of compression and external pressure. **Thin-Walled Structures**, v. 144, p. 106–274, 2019.
- BAŽANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories**. Singapore: World Scientific, 2010.
- BAŽANT, Z. P.; VERDURE, M. Mechanics of progressive collapse: Learning from World Trade Center and building demolitions. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 133, n. 3, p. 308–319, 2007.
- BAŽANT, Z. P.; ZHOU, Y. Addendum to “Why Did the World Trade Center Collapse?—Simple Analysis”. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, n. 3, p. 369–370, 2002.
- BAŽANT, Z. P.; ZHOU, Y. Why did the world trade center collapse?—Simple analysis. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 128, n. 1, p. 2–6, 2002.

- BEHNAM, B.; SHOJAEI, F.; RONAGH, H. Seismic Progressive-Failure Analysis of Tall Steel Structures under Beam-Removal Scenarios. **Frontiers of Structural and Civil Engineering**, v. 13, p. 224–264, 2019.
- BROMWICH, T. J. I<sup>a</sup>. On the roots of the characteristic equation of a linear substitution. **Acta mathematica**, v. 30, p. 297–304, 1906.
- CAMOTIM, D.; BASAGLIA, C. On the behaviour, failure and direct strength design of thin-walled steel structural systems. **Thin-Walled Structures**, v. 81, p. 50–66, 2014.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371–375, 1993.
- CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An Alternative Positional FEM Formulation for Geometrically Non-linear Analysis of Shells: Curved Triangular Isoparametric Elements. **Computational Mechanics**, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, p. 205–223, 2008.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained Finite Element for Geometrical Nonlinear Dynamics of Shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, 2009.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 1–15, 2014.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R.; CARRAZEDO, R. Zig-zag effect without degrees of freedom in linear and non linear analysis of laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 161, p. 32–50, 2017.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R.; SAMPAIO, M. do S. M. Positional description applied to the solution of geometrically non-linear plates and shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 67, p. 66–75, 2013.
- CODA, H. B.; SAMPAIO, M. S.; PACCOLA, R. R. A FEM continuous transverse stress distribution for the analysis of geometrically nonlinear elastoplastic laminated plates and shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 101, p. 15–33, 2015.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. **Computers & Structures**, v. 13, n. 1, p. 55–62, 1981.

- DAGUM, L.; MENON, R. OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming. **IEEE Computational Science and Engineering**, v. 5, n. 1, p. 46–55, 1998.
- DIAB, M. E. H.; ORCESI, A.; DESPREZ, C.; BLEYER, J. A progressive collapse modelling strategy coupling the yield design theory with non-linear analysis. **Engineering Structures**, v. 241, p. 111832, 2021.
- ELLINGWOOD, B. R. Mitigating risk from abnormal loads and progressive collapse. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 20, n. 4, p. 315–323, 2006.
- ELSANADEDY, H.; ALMUSALLAM, T.; ALHARBI, Y.; AL-SALLOUM, Y.; ABBAS, H. Progressive collapse potential of a typical steel building due to blast attacks. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 101, p. 143–157, 2014.
- FENG, Y.; PERIĆ, D.; OWEN, D. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. **Computers & Structures**, v. 58, n. 3, p. 479–485, 1996.
- FRATAMICO, D. C.; TORABIAN, S.; ZHAO, X.; RASMUSSEN, K. J.; SCHAFER, B. W. Experiments on the global buckling and collapse of built-up cold-formed steel columns. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 144, p. 65–80, 2018.
- GARCEA, G. Mixed formulation in Koiter analysis of thin-walled beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 26, p. 3369–3399, 2001.
- GAY NETO, A.; WRIGGERS, P. Computing pointwise contact between bodies: a class of formulations based on master–master approach. **Computational Mechanics**, v. 64, n. 3, p. 585–609, 2019.
- GERASIMIDIS, S.; SIDERI, J. A new partial-distributed damage method for progressive collapse analysis of steel frames. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 119, p. 233–245, 2016.
- GRECO, M.; GESUALDO, F.; VENTURINI, W.; CODA, H. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006.
- HESHMATI, M.; AGHAKOUCHAK, A. A. Collapse analysis of regular and irregular tall steel moment frames under fire loading. **The Structural Design of Tall and Special Buildings**, v. 29, n. 3, p. e1696, 2020.
- IWATA, K.; TSUKIMORI, K.; KUBO, F. A symmetric load-stiffness matrix for buckling analysis of shell structures under pressure loads. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, v. 45, n. 1, p. 101–120, 1991.
- KHANDELWAL, K.; EL-TAWIL, S.; KUNNATH, S. K.; LEW, H. S. Macromodel-Based Simulation of Progressive Collapse: Steel Frame Structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 134, n. 7, p. 1070–1078, 2008.
- KONG, D.-Y.; YANG, Y.; YANG, B.; ZHOU, X.-H. Experimental Study on Progressive Collapse of 3D Steel Frames under Concentrated and Uniformly Distributed Loading Conditions. **Journal of Structural Engineering**, v. 146, n. 4, p. 04020017, 2020.

- KUHL, D.; CRISFIELD, M. A. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, n. 5, p. 569–599, 1999.
- KUHL, D.; RAMM, E. Generalized Energy–Momentum Method for non-linear adaptive shell dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 178, n. 3, p. 343 – 366, 1999.
- KWASNIEWSKI, L. Nonlinear dynamic simulations of progressive collapse for a multistory building. **Engineering Structures**, v. 32, n. 5, p. 1223–1235, 2010.
- LEHOUCQ, R.; SORENSEN, D.; YANG, C. **ARPACK Users' Guide**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- LI, H.; CAI, X.; ZHANG, L.; ZHANG, B.; WANG, W. Progressive collapse of steel moment-resisting frame subjected to loss of interior column: Experimental tests. **Engineering Structures**, v. 150, p. 203–220, 2017.
- LI, H.; EL-TAWIL, S. Three-Dimensional Effects and Collapse Resistance Mechanisms in Steel Frame Buildings. **Journal of Structural Engineering**, v. 140, n. 8, p. A4014017, 2014.
- LI, L.-L.; LI, G.-Q.; JIANG, B.; LU, Y. Analysis of robustness of steel frames against progressive collapse. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 143, p. 264–278, 2018.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. Stanford: Springer, 2008.
- LUO, F. J.; BAI, Y.; HOU, J.; HUANG, Y. Progressive collapse analysis and structural robustness of steel-framed modular buildings. **Engineering Failure Analysis**, v. 104, p. 643–656, 2019.
- MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- MARAGHEH, B. P.; JALALI, A.; HEZAVEH, S. M. M. Effect of initial local failure type on steel braced frame buildings against progressive collapse. **International Journal of Engineering**, v. 33, n. 1, p. 34–46, 2020.
- NOGUEIRA, G. V.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A consistent UVLWT formulation for laminated plane frame analysis considering semi-rigid connections. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 140, p. 59–83, 2018.
- OGDEN, R. W. **Non-Linear Elastic Deformations**. Chichester: Ellis Horwood, 1984.
- PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A direct FEM approach for particulate reinforced elastic solids. **Composite Structures**, v. 141, p. 282–291, 2016.
- PACCOLA, R. R.; PIEDADE NETO, D.; CODA, H. B. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding. **Composite Structures**, v. 133, p. 343–357, 2015.

- PACCOLA, R. R.; SAMPAIO, M. S.; CODA, H. B. Continuous stress distribution following transverse direction for FEM orthotropic laminated plates and shells. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 15, p. 7382–7409, 2016.
- PACCOLA, R. R.; SAMPAIO, M. S. M.; CODA, H. B. Fiber-matrix Contact Stress Analysis for Elastic 2D Composite Solids. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, p. 583–611, 2015.
- PANTIDIS, P.; GERASIMIDIS, S. Progressive collapse of 3D steel composite buildings under interior gravity column loss. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 150, p. 60–75, 2018.
- PARISCH, H. A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 28, n. 8, p. 1803–1812, 1989.
- PASCON, J. P.; CODA, H. B. Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Computers & Structures**, v. 146, p. 59–75, 2015.
- PEARSON, C.; DELATTE, N. Ronan point apartment tower collapse and its effect on building codes. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 19, n. 2, p. 172–177, 2005.
- PIEIDADE NETO, D. **Sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato**. 2009. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- PIEIDADE NETO, D. **On the Generalized Finite Element Method in Nonlinear Solid Mechanics Analyses**. 2013. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.
- QUIEL, S. E.; MARJANISHVILI, S. M. Fire Resistance of a Damaged Steel Building Frame Designed to Resist Progressive Collapse. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, v. 26, n. 4, p. 402–409, 2012.
- RIKS, E. The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 39, n. 4, p. 1060–1065, 1972.
- SALMASI, A.; SHEIDAI, M. R.; SAHEBALZAMAN, M. S.; TARIVERDILO, S. Effect of fully restrained beam-to-column connection on the progressive collapse strength of steel moment frames. **Advances in Structural Engineering**, v. 0, n. 0, p. 1369433219898072, 2020.
- SAMPAIO, M.; PACCOLA, R.; CODA, H. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 119, p. 799–814, 2015.
- SAMPAIO, M. S.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Fully adherent fiber–matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 66, p. 12–25, 2013.

- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Flexible Multibody Dynamics Finite Element Formulation Applied to Structural Progressive Collapse Analysis. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, p. 52–71, 2017.
- SCHWILZERHOF, K.; RAMM, E. Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analyses. **Computers & Structures**, v. 18, n. 6, p. 1099–1114, 1984.
- SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. New York: Springer-Verlag New York, 1998.
- SIMO, J. C.; WRIGGERS, P.; TAYLOR, R. L. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 50, n. 2, p. 163–180, 1985.
- SIQUEIRA, T. M. **Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional**. 2019. 186 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- SOARES, H. B. **Formulação e implementação numérica para análise de estabilidade de perfis de parede fina via MEF Posicional**. 2019. 99 p. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Unconstrained Vector Positional Shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 136, p. 246–257, 2019.
- SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A Box element to model semi-rigid connections in shell-based thin-walled structures analysis. **Engineering Structures**, v. 246, p. 113075, 2021.
- SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A conjugate modal force strategy for instability analysis of thin-walled structures: an unconstrained vector positional finite element approach. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 18, p. e344, 2021.
- SOUZA NETO, E. A. de; PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories**. Singapore: John Wiley & Sons, Ltd, 2008.
- SUN, R.; HUANG, Z.; BURGESS, I. W. Progressive collapse analysis of steel structures under fire conditions. **Engineering Structures**, v. 34, p. 400–413, 2012.
- SZYNISZEWSKI, S.; KRAUTHAMMER, T. Energy flow in progressive collapse of steel framed buildings. **Engineering Structures**, v. 42, p. 142–153, 2012.
- TAYLOR, J. R. **Classical Mechanics**. 4. ed. California: University Science Books, 2005.
- VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into FEM models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 7, p. 585–603, 2008.



- VLASSIS, A.; IZZUDDIN, B.; ELGHAZOU LI, A.; NETHERCOT, D. Progressive collapse of multi-storey buildings due to failed floor impact. **Engineering Structures**, v. 31, n. 7, p. 1522–1534, 2009.
- WANG, F.; YANG, J.; PAN, Z. Progressive collapse behaviour of steel framed substructures with various beam-column connections. **Engineering Failure Analysis**, v. 109, p. 104399, 2020.
- WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, 1971.
- WRIGGERS, P. **Computational Contact Mechanics**. 2. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- WRIGGERS, P.; VAN, T. V.; STEIN, E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. **Computers and Structures**, v. 37, n. 3, p. 319–331, 1990.
- ZIEGLER, H. A modification of prager's hardening rule. **Quarterly of Applied Mathematics**, Brown University, v. 17, n. 1, p. 55–65, 1959.